લેટેસ્ટ 30 % + 70 % પેપર-પેટર્ન અનુસાર આયોજિત

Based on the Vision of NEP 2020 AND NCF-SE 2023

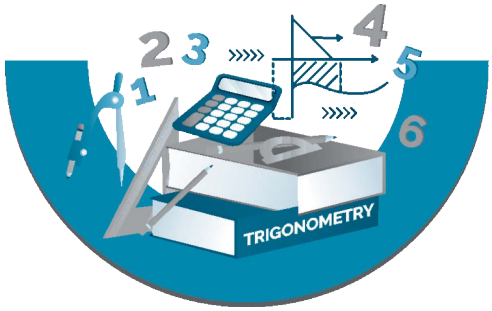
NAVNEET

2025

ગણિત

ધોરણ 9

ક્ષમતા આધારિત પ્રશ્નો (CBQs)નો સઘન મહાવરો	કેસ સ્ટડી આધારિત પ્રશ્નોનો સમાવેશ	પાઠ્યપુસ્તક ના સોલ્યુશન સાથેની અધ્યયન-સામગ્રી



Scan & Get
FREE
NCERT Exemplarનું
ડિજિટલ સોલ્યુશન

NAVNEET®

નવનીત એજ્યુકેશન લિમિટેડ

Visit us at : www.navneet.com | e-mail : navneet.ahd@navneet.com

E2106

નિવેદન

ગણિત : ધોરણ 9ના NCERTના અદ્યતન પાઠ્યપુસ્તક તથા શૈક્ષણિક વર્ષ 2024 – 25થી અમલમાં આવેલ રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિ (NEP) અન્વયે પરીક્ષા-પદ્ધતિમાં થયેલા ફેરફાર અનુસાર આયોજિત **'NAVNEET ગણિત : ધોરણ 9'**ની અદ્યતન આવૃત્તિ પ્રસિદ્ધ કરતાં અમે આનંદ અનુભવીએ છીએ.

આ માર્ગદર્શકનું આયોજન પ્રશ્નપત્રોના લેટેસ્ટ પરિરૂપ અનુસાર **30% હેતુલક્ષી** તથા **70% વર્ણનાત્મક પ્રશ્નો**નો સમાવેશ તેમજ **CBQ – ક્ષમતા આધારિત પ્રશ્નો**ને કેન્દ્રમાં રાખીને કરવામાં આવ્યું છે, ઉપરાંત કેસ સ્ટડી આધારિત પ્રશ્નોનો સમાવેશ પણ કરેલ છે.

આ માર્ગદર્શકમાં પાઠ્યપુસ્તકના દરેક પ્રકરણમાં આપેલા સ્વાધ્યાયના તમામ દાખલાઓના આદર્શ ઉકેલ આપેલા છે. તદ્ઉપરાંત યાદ રાખવાના અગત્યના મુદ્દા, તે મુદ્દાની વિશેષ સમજ કેળવાય તેવા દાખલા, દૃઢીકરણ માટે વધારાના સ્વાધ્યાય, કેસ સ્ટડી, આકૃતિ, આલેખ આધારિત દાખલા તેમજ વિષયવસ્તુની પાયાથી સમજ કેળવાય તેવા હેતુલક્ષી પ્રશ્નોનો સમાવેશ કરેલ છે. દાખલાઓના આદર્શ ઉકેલ અંગે અમારું માનવું છે કે આ પ્રકારના ઉકેલની રજૂઆત કરનાર વિદ્યાર્થીને પૂર્ણ ગુણ મેળવતા કોઈ રોકી શકશે નહીં.

સવિશેષ, ભૂમિતિ વિભાગના પ્રમેયો તેનાં અંગો – પક્ષ, સાધ્ય, આકૃતિ અને સાબિતી – સહિત વ્યવસ્થિત રીતે, મુદ્દાસર, સમજણ પડે અને યાદ રહે તે રીતે 'પ્રમેય વિભાગ'માં આપેલ છે.

આ માર્ગદર્શકમાં પાઠ્યપુસ્તકના સ્વાધ્યાય-પ્રશ્નોના તેમજ પરીક્ષાલક્ષી મહત્ત્વના **CBQ – ક્ષમતા આધારિત પ્રશ્નો** દ્વારા 'વિદ્યાર્થીના વિકાસ', 'વિવેચનાત્મક વિચારસરણી' અને 'સમસ્યા-ઉકેલ' જેવા કૌશલ્યો-વિકાસનો પ્રયાસ આ પુસ્તક દ્વારા કરવામાં આવ્યો છે.

અભ્યાસક્રમમાં સમાવિષ્ટ ગણિતના ખ્યાલોનું હાર્દ વિદ્યાર્થી બરાબર સમજે તે રીતે આ પુસ્તક લખાયું છે. દરેક પ્રશ્નના ઉકેલ કારણ સહિત ચર્ચીને વિષયવસ્તુને વધુ સ્પષ્ટ કરેલ છે. વળી, અઘરી બાબતોને સરળ બનાવવા આકૃતિઓ વડે તલસ્પર્શી રજૂઆત કરી છે. પ્રત્યેક દાખલાનો ઉકેલ ખૂબ જ સરળ રીતે અને તાર્કિક પદ્ધતિથી આપવામાં આવ્યો છે.

પુસ્તકના અંતે બોર્ડ દ્વારા પ્રકાશિત લેટેસ્ટ પેપર-પૅટર્ન આધારિત પ્રથમ, દ્વિતીય તથા વાર્ષિક પરીક્ષા માટેનાં પ્રશ્નપત્રોનો જવાબો સહિત સમાવેશ કરવામાં આવ્યો છે, જે વિદ્યાર્થીને પરીક્ષાની તૈયારી માટે ખૂબ જ ઉપયોગી થશે.

પુસ્તક ખૂબ જ કાળજીપૂર્વક તૈયાર કરવામાં આવેલ છે. તેમ છતાં પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં રચનાત્મક સૂચનો સુજ્ઞ શિક્ષકમિત્રો, વહાલા વિદ્યાર્થીમિત્રો તથા વાલીઓ તરફથી મળે તો સદાય આવકાર્ય રહેશે.

– પ્રકાશક

વિષય-સલાહકાર

આ પુસ્તકને સંપૂર્ણ સહાયક પુસ્તક બનાવવા માટે મળેલ વિશેષ માર્ગદર્શન માટે અમે **શ્રી ગૌતમ બી. શાહ** (M. Sc.)ના વિશેષ આભારી છીએ.

આ પુસ્તકની આગવી વિશેષતાઓ :

- NCERTના પાઠ્યપુસ્તક તથા લેટેસ્ટ પેપર-પૅટર્ન અનુસારનું આયોજન.
- દરેક પ્રકરણમાં વિષયવસ્તુને અનુરૂપ યાદ રાખવાના અગત્યના મુદ્દા.
- દરેક પ્રકરણમાં યાદ રાખવાના અગત્યના મુદ્દાની વિશેષ સમજ માટે ગણી બતાવેલ દાખલાઓ.
- દરેક પ્રકરણમાં પાઠ્યપુસ્તકના સ્વાધ્યાયના તમામ દાખલાઓના આદર્શ ઉકેલ તથા **વિષયવસ્તુને પાકું કરવા દૃઢીકરણના દાખલા (જવાબો સાથે).**
- પ્રકરણના અંતે સ્વ-મૂલ્યાંકન માટે જવાબો સહિત હેતુલક્ષી પ્રશ્નો તથા બોર્ડ દ્વારા નિર્દેશિત **CBQ – ક્ષમતા આધારિત પ્રશ્નો** તેમજ **કેસ સ્ટડી આધારિત પ્રશ્નો**નો સમાવેશ.
- **કૌશલ્ય-વિકાસ :** Competency Based Questions દ્વારા વિદ્યાર્થીની વિષયસમજ તથા કૌશલ્યો-વિકાસનો અનેરો પ્રયાસ.
- ભૂમિતિ વિભાગના પ્રાણસમાન પ્રમેયોનો 'પ્રમેય વિભાગ'માં સર્વાંગસંપૂર્ણ સમાવેશ.
- પુસ્તકના અંતે રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિ (NEP) અન્વયે પરીક્ષા-પદ્ધતિમાં થયેલા ફેરફાર અનુસાર આયોજિત પ્રથમ, દ્વિતીય તથા વાર્ષિક પરીક્ષા માટેનાં નમૂનાનાં પ્રશ્નપત્રોનો જવાબો સાથે સમાવેશ.

અનુક્રમણિકા

❊ **પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ** **4**

1. સંખ્યા પદ્ધતિ 5
2. બહુપદીઓ 24
3. યામ ભૂમિતિ 44
4. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો 53
5. યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય 59
6. રેખાઓ અને ખૂણાઓ 64
7. ત્રિકોણ 74
8. ચતુષ્કોણ 86
9. વર્તુળ 97
10. હેરોનનું સૂત્ર 108
11. પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ 114
12. આંકડાશાસ્ત્ર 128

❊ **પ્રમેય વિભાગ** **148**

આદર્શ પ્રશ્નપત્રો :

❊ પ્રશ્નપત્ર 1 : પ્રથમ પરીક્ષા 158
❊ પ્રશ્નપત્ર 2 : દ્વિતીય પરીક્ષા 160
❊ પ્રશ્નપત્ર 3 : વાર્ષિક પરીક્ષા 162
❊ **જવાબો** **166**

© All rights reserved.

પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ

હેતુઓ પ્રમાણે ગુણભાર

પરીક્ષા	હેતુઓ	જ્ઞાન	સમજ	ઉપયોજન	ઉચ્ચ વૈચારિક કૌશલ્ય		કુલ
					સંયોજન / વિશ્લેષણ	અનુમાન / મૂલ્યાંકન	
પ્રથમ અને દ્વિતીય	ગુણ	16	16	13	03	02	**50**
	%	32	32	26	06	04	**100**
વાર્ષિક	ગુણ	27	25	20	04	04	**80**
	%	34	31	25	05	05	**100**

પ્રશ્નપ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર

પ્રશ્નપ્રકાર	પ્રથમ અને દ્વિતીય પરીક્ષા [સમય : 2 કલાક]			વાર્ષિક પરીક્ષા [સમય : 3 કલાક]		
	પ્રશ્નોની સંખ્યા			પ્રશ્નોની સંખ્યા		
	વિકલ્પ વિના	વિકલ્પ સાથે	કુલ ગુણ	વિકલ્પ વિના	વિકલ્પ સાથે	કુલ ગુણ
હેતુલક્ષી પ્રશ્નો (OQ)	15	15	15	24	24	24
ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો – I (SQ – I)	06	09	12	09	13	18
ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો – II (SQ – II)	05	08	15	06	09	18
વિસ્તૃત પ્રશ્નો (LQ)	02	03	08	05	08	20
કુલ	**28**	**35**	**50**	**44**	**54**	**80**

પ્રકરણ પ્રમાણે ગુણભાર

પ્રકરણ ક્રમ	પ્રકરણનું નામ	પ્રથમ પરીક્ષા	દ્વિતીય પરીક્ષા	વાર્ષિક પરીક્ષા	
				વિકલ્પ વિના	વિકલ્પ સાથે
1.	સંખ્યા પદ્ધતિ	10	03	08	10
2.	બહુપદીઓ	12	03	08	10
3.	યામ ભૂમિતિ	05	02	04	04
4.	દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો	07	02	04	04
5.	યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય	04	02	02	02
6.	રેખાઓ અને ખૂણાઓ	12	03	08	13
7.	ત્રિકોણ	–	10	07	11
8.	ચતુષ્કોણ	–	09	07	07
9.	વર્તુળ	–	10	09	13
10.	હેરોનનું સૂત્ર	–	06	05	08
11.	પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ	–	–	10	15
12.	આંકડાશાસ્ત્ર	–	–	08	12
	કુલ ગુણ	**50**	**50**	**80**	**109**

1 સંખ્યા પદ્ધતિ (NUMBER SYSTEMS)

યાદ રાખો

* **પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (Natural numbers) :** સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4, ... પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કહેવાય છે. આવી બધી સંખ્યાઓના જથ્થાને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો જથ્થો કહે છે. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના જથ્થાને સંકેત N વડે દર્શાવાય છે.
  - → આથી N = {1, 2, 3, ...}
  - → સૌથી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1 છે, પરંતુ સૌથી મોટી પ્રાકૃતિક સંખ્યા ન મળે. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ અગણ્ય (અસંખ્ય) છે.
  - → પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ a અને b (જ્યાં, $a < b$ હોય) માટે a અને bની વચ્ચે $(b-a-1)$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ મળે.
* **પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole numbers) :** પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના જથ્થામાં 0(શૂન્ય)નો સમાવેશ કરવાથી પૂર્ણ સંખ્યાઓનો જથ્થો મળે. તેને સંકેત W દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.
  - → આથી W = {0, 1, 2, 3, ...}
  - → સૌથી નાની પૂર્ણ સંખ્યા 0 છે, પરંતુ સૌથી મોટી પૂર્ણ સંખ્યા ન મળે. પૂર્ણ સંખ્યાઓ અસંખ્ય છે.
  - → પૂર્ણ સંખ્યાઓ a અને b (જ્યાં, $a < b$ હોય) માટે a અને bની વચ્ચે $(b-a-1)$ પૂર્ણ સંખ્યાઓ મળે.
* **પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (Integers) :** બધી જ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, તેમની વિરોધી સંખ્યાઓ તથા 0ના જથ્થાને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો જથ્થો કહે છે. તેને સંકેત Z દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.
  - → આથી Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}
  - → પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના જથ્થા માટે વપરાતો સંકેત Z એ જર્મન ભાષાના શબ્દ 'Zahlen' પરથી આવેલ છે, જેનો અર્થ છે 'સંખ્યા' અથવા 'ગણવું'.
  - → સૌથી નાની તથા સૌથી મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા ન મળે. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અસંખ્ય છે.
  - → પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b (જ્યાં, $a < b$ હોય) માટે a અને b વચ્ચે $(b-a-1)$ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ મળે.
* **સંમેય સંખ્યાઓ (Rational numbers) :** જો p અને q પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર હોય તથા સંખ્યા 'r' ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય, તો 'r' ને સંમેય સંખ્યા કહે છે. $\frac{p}{q}$ (જ્યાં, p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$) સ્વરૂપની બધી જ સંખ્યાઓના જથ્થાને સંમેય સંખ્યાઓનો જથ્થો કહે છે. તેને સંકેત Q દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.
  - → અંગ્રેજી શબ્દ Rational એ Ratio પરથી આવેલ છે અને Q સંકેત એ અંગ્રેજી શબ્દ Quotient પરથી આવેલ છે.
  - → સૌથી નાની અને સૌથી મોટી સંમેય સંખ્યા ન મળે. સંમેય સંખ્યાઓ અસંખ્ય છે.
  - → સંમેય સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ તે બધી જ સંખ્યાઓ એક જ સંખ્યા $\frac{1}{4}$ દર્શાવે છે. આ બધી જ સંખ્યાઓને સમાન સંમેય સંખ્યાઓ (Equivalent rational numbers) કહે છે.
  - → $\frac{p}{q}$નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરીએ છીએ ત્યારે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે $q \neq 0$ અને p અને qને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી. (એટલે કે p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય (co-prime) છે.)
  - → સંમેય સંખ્યાઓ a અને b (જ્યાં, $a < b$) માટે a અને bની વચ્ચે અસંખ્ય સંમેય સંખ્યાઓ મળે. સંમેય સંખ્યાઓના જથ્થા Qનો આ વિશેષ ગુણ છે.
  - → દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ સંમેય સંખ્યા પણ છે, દા. ત., $7 = \frac{7}{1}$. તે જ રીતે દરેક પૂર્ણ સંખ્યા તથા દરેક પૂર્ણાંક સંખ્યા પણ સંમેય સંખ્યા છે.
  - → સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ સાન્ત મળે અથવા અનંત આવૃત્ત મળે. દા. ત., $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{12}{5} = 2.4$, $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$, $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$
* **આપેલ બે ભિન્ન સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ :** આપેલ બે ભિન્ન સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચેની માગ્યા પ્રમાણેની સંમેય સંખ્યાઓ શોધવા ત્રણ અલગ પદ્ધતિઓ વાપરી શકીએ.

(1) ધારો કે આપેલ ભિન્ન સંમેય સંખ્યાઓ a અને b $(a < b)$ છે. a અને bની સરેરાશ લેતા મળતી સંખ્યા $\frac{a+b}{2}$ એ a અને b વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા થાય. એટલે કે $a < \frac{a+b}{2} < b$. આ જ પદ્ધતિએ આગળ વધતા આપણને a અને b વચ્ચેની જોઈતી સંમેય સંખ્યાઓ મળે.

(2) a અને bને સમચ્છેદી સંખ્યાઓ તરીકે દર્શાવો અને ત્યારબાદ a અને b વચ્ચેની કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ શોધવી છે તે મુજબની સમાન સંમેય સંખ્યાઓ દર્શાવો.

(3) a અને bને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવો અને ત્યારબાદ દશાંશ સ્થળની જમણી બાજુના અંકો પછી જોઈતા પ્રમાણમાં શૂન્યો ઉમેરો.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય? કારણ સહિત જવાબ આપો :

(i) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(ii) દરેક પૂર્ણાંક એ સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણાંક છે.

(i) આ વિધાન **અસત્ય છે**; કારણ કે 0 એ પૂર્ણ સંખ્યા છે, પરંતુ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) આ વિધાન **સત્ય છે**; કારણ કે દરેક પૂર્ણાંક mને $\frac{m}{1}$ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) આ વિધાન **અસત્ય છે**; કારણ કે $\frac{3}{5}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, પરંતુ પૂર્ણાંક નથી.

2. 1 અને 2 વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઓછામાં ઓછી બે રીતે મેળવી શકાય :

રીત 1 :

r અને s વચ્ચેની એક સંમેય સંખ્યા શોધવા માટે r અને sનો સરવાળો કરીને સરવાળાને 2 વડે ભાગવાથી $\frac{r+s}{2}$ મળે જે r અને sની વચ્ચે હોય છે. આથી $\mathbf{\frac{3}{2}}$ એ 1 અને 2ની વચ્ચેની એક સંખ્યા છે. આ પદ્ધતિથી આગળ વધતા 1 અને 2 વચ્ચેની બીજી ચાર સંમેય સંખ્યાઓ મળે. આવી અન્ય ચાર સંમેય સંખ્યાઓ $\mathbf{\frac{5}{4}}$, $\mathbf{\frac{11}{8}}$, $\mathbf{\frac{13}{8}}$ **અને** $\mathbf{\frac{7}{4}}$ છે.

રીત 2 :

બીજી રીતમાં એક જ સોપાનમાં પાંચેય સંમેય સંખ્યા શોધી શકાય છે. આપણે પાંચ સંખ્યાઓ શોધવા માંગીએ છીએ. તેથી $5 + 1 = 6$ને છેદ તરીકે લઈને 1 અને 2ને છેદમાં 6 હોય તેવી સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે $1 = \frac{6}{6}$ અને $2 = \frac{12}{6}$. તેથી $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$ એ બધી સંખ્યાઓ 1 અને 2 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ છે. આમ, માગેલ પાંચ સંખ્યાઓ $\mathbf{\frac{7}{6}}$, $\mathbf{\frac{4}{3}}$, $\mathbf{\frac{3}{2}}$, $\mathbf{\frac{5}{3}}$ **અને** $\mathbf{\frac{11}{6}}$ છે.

રીત 3 :

1 અને 2ને દશાંશ સ્વરૂપમાં એક દશાંશ સ્થળ સાથે દર્શાવીએ, તો $1 = 1.0$ અને $2 = 2.0$ મળે. તેથી 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 એ બધી સંખ્યાઓ 1 અને 2 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ છે. આમ, માગેલ પાંચ સંખ્યાઓ **1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5** છે.

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે દાખલા 2માં 1 અને 2 વચ્ચેની ફક્ત પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ જ શોધવાનું કહ્યું છે, પરંતુ આપને સમજાયું હશે કે 1 અને 2 વચ્ચે અસંખ્ય સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે. વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.

સ્વાધ્યાય 1.1 | પાના નં. 4

1. શું શૂન્ય એ એક સંમેય સંખ્યા છે? શું તમે તેને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકશો?

હા. શૂન્ય એક સંમેય સંખ્યા છે. શૂન્ય એ પૂર્ણ સંખ્યા પણ છે તથા પૂર્ણાંક સંખ્યા પણ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે દરેક પૂર્ણ સંખ્યા તેમજ દરેક પૂર્ણાંક સંખ્યા એ સંમેય સંખ્યા છે જ. આમ, શૂન્ય પણ સંમેય સંખ્યા છે.

શૂન્યને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં અનેક રીતે લખી શકાય; જેમ કે $\mathbf{\frac{0}{5}}$, $\mathbf{\frac{0}{11}}$, $\mathbf{\frac{0}{-3}}$, ... ટૂંકમાં $\frac{0}{q}$, જ્યાં q એ શૂન્યેતર પૂર્ણાંક છે, એ શૂન્યનું $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપ છે.

2. 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ શોધવાની હોવાથી આપણે બંને સંખ્યાઓ 3 અને 4ને છેદમાં 7 (6 + 1) આવે તેવી સમાન સંમેય સંખ્યા તરીકે દર્શાવીએ.

$3 = \frac{3\times7}{1\times7} = \frac{21}{7}$ અને $4 = \frac{4\times7}{1\times7} = \frac{28}{7}$

હવે, $\frac{21}{7} < \frac{22}{7} < \frac{23}{7} < \frac{24}{7} < \frac{25}{7} < \frac{26}{7} < \frac{27}{7} < \frac{28}{7}$. આમ, $\mathbf{\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}}$ એ 3 અને 4 વચ્ચેની અનંત સંમેય સંખ્યાઓ પૈકીની છ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

બીજી રીતે, $3 = 3.0$ અને $4 = 4.0$ લેતાં 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ તરીકે **3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6** લઈ શકાય.

વળી, સરેરાશની રીતને અનુસરતા આપણે 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ તરીકે $\mathbf{\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}, \frac{25}{8}, \frac{27}{8}, \frac{29}{8}}$ લઈ શકીએ.

કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ મળતી હોવાથી આપણે જુદા જુદા અનેક જવાબ આપી શકીએ.

3. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times6}{5\times6} = \frac{18}{30}$ અને $\frac{4}{5} = \frac{4\times6}{5\times6} = \frac{24}{30}$

હવે, $\frac{18}{30} < \frac{19}{30} < \frac{20}{30} < \frac{21}{30} < \frac{22}{30} < \frac{23}{30} < \frac{24}{30}$,

એટલે કે $\frac{3}{5} < \frac{19}{30} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{11}{15} < \frac{23}{30} < \frac{4}{5}$.

આમ, $\mathbf{\frac{19}{30}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{23}{30}}$ એ $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની અનંત સંમેય સંખ્યાઓ પૈકીની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

નોંધ : $\frac{3}{5} = 0.6$ અને $\frac{4}{5} = 0.8$ લઈને દશાંશ સ્વરૂપમાં માગેલ સંખ્યાઓ સરળતાથી શોધી શકાય. દા. ત., 0.62, 0.64, 0.66, 0.68, 0.7

4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય? કારણ સહિત જવાબ આપો :

(i) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

(ii) દરેક પૂર્ણાંક એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

(iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

(i) આપેલ વિધાન **સત્ય છે,** કારણ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓના જથ્થામાં દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સમાવેશ થાય છે.

(ii) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે,** કારણ કે કોઈ પણ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા જેવી કે -2, -3, -5 વગેરે એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી. પૂર્ણ સંખ્યાના જથ્થામાં 0 તથા પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે, પરંતુ પ્રાકૃતિક સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યાનો સમાવેશ થતો નથી.

(iii) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે,** કારણ કે કોઈ પણ બે ક્રમિક પૂર્ણ સંખ્યાની વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી. દા. ત., પૂર્ણ સંખ્યાઓ 2 અને 3ની વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા $\frac{5}{2}$ એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{7}{8}$ વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

2. $\frac{1}{6}$ અને $\frac{1}{5}$ વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

3. $\frac{3}{7}$ અને $\frac{5}{7}$ વચ્ચેની ચાર સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

4. $\frac{2}{9}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચેની ચાર સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

5. $\frac{2}{7}$ અને $\frac{3}{4}$ વચ્ચેની ચાર સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

જવાબો : 1. $\frac{25}{40}\left(=\frac{5}{8}\right)$, $\frac{26}{40}\left(=\frac{13}{20}\right)$, $\frac{27}{40}$

2. $\frac{21}{120}\left(=\frac{7}{40}\right)$, $\frac{22}{120}\left(=\frac{11}{60}\right)$, $\frac{23}{120}$

3. $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{12}{21}\left(=\frac{4}{7}\right)$, $\frac{13}{21}$

4. $\frac{29}{126}$, $\frac{30}{126}\left(=\frac{5}{21}\right)$, $\frac{31}{126}$, $\frac{32}{126}\left(=\frac{16}{63}\right)$

5. $\frac{9}{28}$, $\frac{10}{28}\left(=\frac{5}{14}\right)$, $\frac{11}{28}$, $\frac{12}{28}\left(=\frac{3}{7}\right)$

નોંધ : જે પ્રશ્ન નંબરમાં કે પ્રશ્ન આગળ સ્ક્રીન ( ) મૂકવામાં આવેલ છે, તે વિદ્યાર્થીઓની વિવિધ ક્ષમતા ચકાસણી કરે તેવા (CBQ – Competency Based Questions) પ્રશ્નો છે.

યાદ રાખો

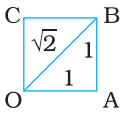
* **અસંમેય સંખ્યાઓ (Irrational numbers) :** જો સંખ્યા sને p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મૂકી ના શકાય, તો તેવી સંખ્યા sને અસંમેય સંખ્યા કહે છે.
  - → બીજી રીતે, જે સંખ્યા સંમેય સંખ્યા નથી તેને અસંમેય સંખ્યા કહે છે. દશાંશપદ્ધતિ મુજબ જે સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત ન હોય તેવી સંખ્યાને અસંમેય સંખ્યા કહે છે. અસંમેય સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય નહીં.
  - → $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$ જેવી સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે.
  - → અસંમેય સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે. દા. ત., 0.01001000100001 ...
* **વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (Real numbers) :** સંમેય સંખ્યાઓ તથા અસંમેય સંખ્યાઓને એકસાથે લેતા જે સમૂહ મળે તેને વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો સમૂહ કહે છે. તેને સંકેત R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
* કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગમૂળના સ્વરૂપમાં હોય તેવી અસંમેય સંખ્યા જેવી કે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરેને પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગ દ્વારા આપણે સંખ્યારેખા પર દર્શાવી શકીએ. તે માટે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાને બે કે તેથી વધુ સંખ્યાઓના વર્ગના સરવાળા તરીકે દર્શાવવી પડે.

  દા. ત., $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\sqrt{21} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}$
* પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પરના એક અનન્ય બિંદુ તરીકે નિરૂપણ કરી શકાય છે. એવી જ રીતે સંખ્યારેખાનું પ્રત્યેક બિંદુ એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે. આ કારણથી જ સંખ્યારેખાને વાસ્તવિક સંખ્યારેખા કહેવામાં આવે છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

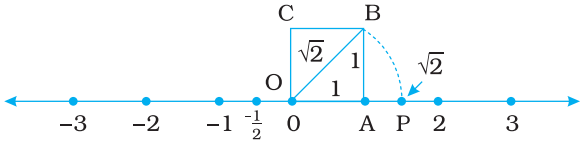
3. સંખ્યારેખા પર $\sqrt{2}$ દર્શાવો.

એક એકમ લંબાઈની બાજુઓવાળા ચોરસ OABC (જુઓ આકૃતિ 1)નો વિચાર કરો.



આકૃતિ 1

તમે પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી જોઈ શકો છો કે $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. વિચાર કરો કે સંખ્યારેખા પર તમે $\sqrt{2}$ નું નિરૂપણ કેવી રીતે કરશો? આ ખૂબ જ સરળ છે. ચોરસ OABCની આકૃતિને સંખ્યારેખા પર એવી રીતે લઈ જાવ કે જેથી શિરોબિંદુ O શૂન્ય પર આવે. (જુઓ આકૃતિ 2)

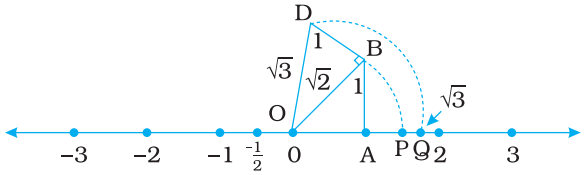


આકૃતિ 2

→ આપણે હમણાં જ જોયું છે કે $OB = \sqrt{2}$. પરિકર દ્વારા Oને કેન્દ્ર લઈ OB જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને Pમાં છેદતું ચાપ દોરીએ ત્યારે મળતું સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ P એ $\sqrt{2}$ ને સંગત બિંદુ થાય છે.

4. સંખ્યારેખા પર $\sqrt{3}$ દર્શાવો.

ફરી પાછા દાખલા નં. 3ની આકૃતિ 2 પર આવીએ.



આકૃતિ 3

OB પર એકમ લંબાઈનો લંબ BD દોરીએ. (જુઓ આકૃતિ 3) પાયથાગોરસ પ્રમેય પ્રમાણે $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ મળે. પરિકરથી O કેન્દ્ર અને OD જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને Qમાં છેદતું એક ચાપ દોરીએ. તેથી બિંદુ Q એ $\sqrt{3}$ ને સંગત છે. આ જ પ્રમાણે n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $\sqrt{n-1}$ નું નિરૂપણ કર્યા પછી $\sqrt{n}$ નું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2 | પાના નં. 7

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય? કારણ સહિત જવાબ આપો :

(i) દરેક અસંમેય સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

(ii) સંખ્યારેખા પરનું દરેક બિંદુ કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ સ્વરૂપનું હોય છે.

(iii) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(i) આપેલ વિધાન **સત્ય છે.** વાસ્તવિક સંખ્યાના સમૂહમાં દરેક સંમેય સંખ્યા તથા દરેક અસંમેય સંખ્યાનો સમાવેશ થાય છે.

(ii) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે.** સંખ્યારેખા પર દર્શાવવામાં આવતી ઋણ સંખ્યાઓ કદી પણ કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ સ્વરૂપની ન હોઈ શકે. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ ધન સંખ્યા છે.

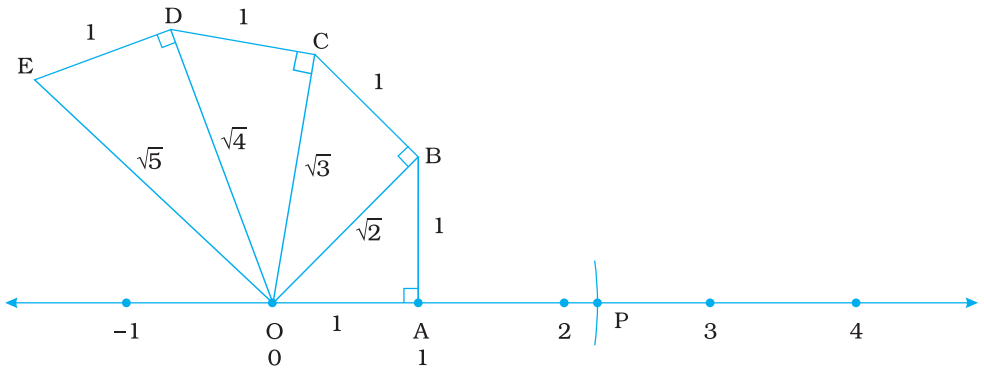
(iii) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે.** વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં સંમેય સંખ્યાઓ તથા અસંમેય સંખ્યાઓ બંનેનો સમાવેશ થાય છે. આથી દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય સંખ્યા અથવા અસંમેય સંખ્યા હોઈ શકે.

2. શું દરેક ઘન પૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ અસંમેય હોય છે? જો ના, તો એવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ આપો જેનું વર્ગમૂળ સંમેય સંખ્યા હોય.

ના. દરેક ઘન પૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ અસંમેય જ હોય તેવું નથી. દરેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા કે જે હંમેશાં ઘન પૂર્ણાંક જ હોય, તેનું વર્ગમૂળ હંમેશાં સંમેય સંખ્યા જ હોય.

ઉદાહરણ : $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, ...

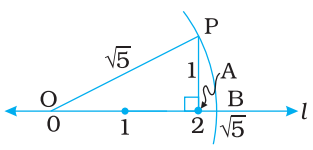
3. $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે બતાવો.



સૌપ્રથમ સંખ્યારેખા પર એક બિંદુ O પસંદ કરો, જેને સંગત સંખ્યા 0 છે. યોગ્ય એકમ પસંદ કરીને સંખ્યારેખા પર બિંદુ A દર્શાવો, જે સંખ્યા 1નું નિરૂપણ કરે. રેખાખંડ OAને લંબ હોય તેવો 1 એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ AB દોરો. રેખાખંડ OB દોરો. હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર $OB = \sqrt{2}$ થાય. રેખાખંડ OBને લંબ હોય તેવો 1 એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ BC દોરો. રેખાખંડ OC દોરો. હવે, $OC = \sqrt{3}$ થાય. રેખાખંડ OCને લંબ હોય તેવો 1 એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ CD દોરો. રેખાખંડ OD દોરો. હવે, $OD = \sqrt{4}$ થાય. રેખાખંડ ODને લંબ હોય તેવો 1 એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ DE દોરો. રેખાખંડ OE દોરો. હવે, $OE = \sqrt{5}$ થાય. હવે, O કેન્દ્ર અને OE ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળનો એક ચાપ દોરો, જે સંખ્યારેખાને Pમાં છેદે. આમ, $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર બિંદુ P દ્વારા દર્શાવી શકાય.

ટૂંકી રીત :

$\sqrt{5}$ નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ બીજી ટૂંકી રીતે પણ કરી શકાય.



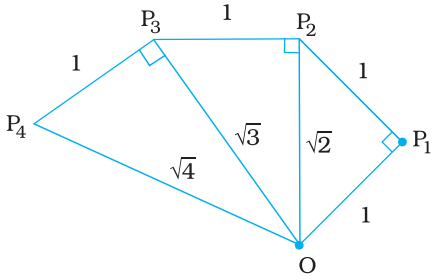
સંખ્યારેખા l પર 0ને સંગત હોય તેવું બિંદુ O પસંદ કરો. યોગ્ય એકમ પસંદ કરીને $OA = 2$ એકમ થાય તેવું બિંદુ A સંખ્યારેખા પર લો. હવે, કાટકોણ ΔOAP રચો. જેમાં $\angle OAP = 90°$ અને $AP = 1$ એકમ હોય. હવે, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર, $OP^2 = OA^2 + AP^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$.

$\therefore OP = \sqrt{5}$

હવે, O કેન્દ્ર અને OP ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળનું એક ચાપ દોરો, જે lને Bમાં છેદે. $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર બિંદુ B દ્વારા દર્શાવી શકાય.

4. વર્ગ-પ્રવૃત્તિ : વર્ગમૂળ કુંતલ(Spiral)ની રચના : એક મોટો કાગળ લો અને નીચે બતાવેલી પદ્ધતિથી 'વર્ગમૂળ કુંતલ'ની રચના કરો. સૌથી પહેલાં એક બિંદુ O લો અને એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ OP_1 દોરો. OP_1ને લંબ હોય તેવો એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ P_1P_2 દોરો. (જુઓ આકૃતિ) હવે, રેખાખંડ OP_2 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_2P_3 દોરો. ત્યારપછી રેખાખંડ OP_3 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_3P_4 દોરો. આ જ રીતે આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખીને રેખાખંડ OP_{n-1} પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ $P_{n-1}P_n$ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે O, P_1, P_2, P_3, ..., P_n... બિંદુઓ મેળવી શકીશું અને

તેમને જોડતાં $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...ને દર્શાવતું સુંદર વર્ગમૂળ કુંતલ મળશે.



[વર્ગમૂળ કુંતલની રચના]

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. $\sqrt{3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.
2. $\sqrt{7}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.
3. $\sqrt{17}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો. [**સૂચન :** $4^2 + 1^2 = 17$ નો ઉપયોગ કરો.]
4. $\sqrt{13}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો. [**સૂચન :** $3^2 + 2^2 = 13$નો ઉપયોગ કરો.]

યાદ રાખો

વાસ્તવિક સંખ્યા અને તેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ :

* દરેક સંમેય સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે; જ્યાં p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય.

હવે, $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે p ને q વડે ભાગવામાં આવે છે. ભાગફળ શોધવાની ક્રિયા દરમિયાન મળતી શેષ વિશે બે શક્યતાઓ જોવા મળે છે :

(1) **ભાગાકારની ક્રિયાના અમુક તબક્કા પછી શેષ શૂન્ય મળે છે.**

દા. ત., $\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8\overline{)\,5.000} \\ -\,48 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{8} = 0.625$ જુઓ અહીં શેષ : 2, 4, 0

આવી સંખ્યાઓને સરળતાથી દશાંશ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય છે.

(2) **ભાગાકારની ક્રિયાના અમુક તબક્કા પછી શેષ ક્યારેય શૂન્ય થતી નથી, પરંતુ શેષનું પુનરાવર્તન થાય છે અને દશાંશ અભિવ્યક્તિ આગળને આગળ વધતી જાય છે.**

દા. ત., $\frac{5}{7}$

$$\begin{array}{r} 0.714285 \\ 7\overline{)\,5.000000} \\ -\,49 \\ \hline 10 \\ -\,7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 5 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{7} = 0.714285714285 \ldots$

જુઓ અહીં શેષ : 1, 3, 2, 6, 4, 5 મળે છે. તે પછી પુનરાવર્તન થાય છે.

અહીં, શેષ 1, 3, 2, 6, 4 અને 5નું તે જ ક્રમમાં ફરી ને ફરી પુનરાવર્તન થાય છે. ભાગફળમાં 0 પૂર્ણાંક પછી અનુક્રમે 7, 1, 4, 2, 8 અને 5નું તે જ ક્રમમાં ફરી ને ફરી પુનરાવર્તન થાય છે. આને અનંત આવૃત્ત અભિવ્યક્તિ કહેવાય છે.

→ આમ, જે સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત હોય, તો તે સંખ્યા સંમેય સંખ્યા છે.

→ કોઈ પણ સંખ્યા દશાંશ સ્વરૂપમાં અનંત આવૃત્ત સ્વરૂપે આપેલ હોય તો તેને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે.

→ જો સંમેય સંખ્યા $0.ppp\ldots$ સ્વરૂપે હોય, તો તેને $\frac{p}{9}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

→ જો સંમેય સંખ્યા $0.pqpq\ldots$ સ્વરૂપે હોય, તો તેને $\frac{pq}{99}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

→ જો સંમેય સંખ્યા $0.pqrpqr\ldots$ સ્વરૂપે હોય, તો તેને $\frac{pqr}{999}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

→ જો કોઈ બે સંમેય સંખ્યાઓ આપી હોય, તો તેમની વચ્ચેની એક કે તેથી વધુ અસંમેય સંખ્યાઓ મેળવી શકાય.

→ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ વગેરે જેવી અસંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત મળે.

→ π અસંમેય સંખ્યા છે. $\pi = \frac{22}{7}$ કે $\pi = 3.14$ એ આશરે (આસન્ન) મૂલ્યો છે.

→ જો કોઈ સંમેય સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત આવૃત્ત હોય, પરંતુ તેમાં દશાંશ-ચિહ્ન પછીના બધા જ અંકો પુનરાવર્તિત ન થતા હોય, તો તેવી સંખ્યાને પણ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં સહેલાઈથી નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$a.b\overline{cd} = \frac{p}{q}$

જ્યાં p = દશાંશ-ચિહ્નની અવગણના કરતાં બધા જ અંકો દ્વારા બનતી સંખ્યા – દશાંશ-ચિહ્નની અવગણના કરતાં પુનરાવર્તિત ન થતા હોય તેવા અંકો દ્વારા બનતી સંખ્યા.

એટલે કે $p = abcd - ab$

q = દશાંશ-ચિહ્ન બાદ જેટલા અંકો પુનરાવર્તિત થતા હોય તેટલા 9 અને જેટલા અંકો પુનરાવર્તિત ન થતા હોય તેટલા 0 દ્વારા બનતી સંખ્યા.

એટલે કે $q = 990$

આમ, $a.b\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{990}$

દા. ત., $5.4\overline{62} = \frac{5462 - 54}{990} = \frac{5408}{990}$

$3.41\overline{78} = \frac{34178 - 341}{9900} = \frac{33837}{9900}$

→ જો કોઈ સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય અથવા અનંત આવૃત્ત હોય, તો અને તો જ તે સંખ્યા સંમેય સંખ્યા છે.

→ જો કોઈ સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તો અને તો જ તે સંખ્યા અસંમેય સંખ્યા છે.

→ ટૂંકમાં, સંમેય સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત હોય છે અને અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે.

→ સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$માં જો $q = 2^m5^n$ (m અને n પૂર્ણ સંખ્યા) હોય તો તેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત મળે.

→ સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$માં જો qને 2 અને 5 સિવાયનો કોઈ પણ અવિભાજ્ય અવયવ હોય તો તેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત આવૃત્ત મળે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

5. $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ અને $\frac{1}{7}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ 3 & 10.000 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 1 \end{array}$$

શેષ : 1, 1, 1, 1, 1 ...

ભાજક : 3

$\therefore \frac{10}{3} = \mathbf{3.\overline{3}}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ 8 & 7.000 \\ & \underline{64} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & 0 \end{array}$$

શેષ : 6, 4, 0

ભાજક : 8

$\therefore \frac{7}{8} = \mathbf{0.875}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.142857\ldots \\ 7 & 1.000000 \\ & \underline{7} \\ & 30 \\ & \underline{28} \\ & 20 \\ & \underline{14} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{35} \\ & 50 \\ & \underline{49} \\ & 1 \end{array}$$

શેષ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 ...

ભાજક : 7 $\therefore \frac{1}{7} = \mathbf{0.\overline{142857}}$

6. સાબિત કરો કે, 3.142678 સંમેય સંખ્યા છે. બીજા શબ્દોમાં p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તે પ્રમાણે 3.142678ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

અહીં, $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ છે અને તેથી તે એક સંમેય સંખ્યા છે.

7. સાબિત કરો કે $0.3333 ... = 0.\overline{3}$ ને p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ધારો કે $x = 0.3333 ...$

$\therefore 10x = 10 \times (0.3333 ...) = 3.3333 ...$

હવે, $3.3333 ... = 3 + 0.3333 ...$

$\therefore 10x = 3 + x$ જ્યાં, $x = 0.3333 ...$

તેથી xમાં ઉકેલ મેળવવા માટે $9x = 3$ એટલે કે $x = \frac{1}{3}$ મળે.

8. સાબિત કરો કે $1.272727 ... = 1.\overline{27}$ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ધારો કે, $x = 1.272727 ...$

અહીં, બે અંકોનું પુનરાવર્તન થાય છે. તેથી આપણે બંને બાજુ 100 વડે ગુણીએ, તો

$100x = 127.2727 ...$

તેથી $100x = 126 + 1.2727 ... = 126 + x$

$\therefore 100x - x = 126$

$\therefore 99x = 126$

એટલે કે, $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$ મળે.

9. સાબિત કરો કે $0.2353535 ... = 0.2\overline{35}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ધારો કે, $x = 0.2353535 ... = 0.2\overline{35}$

અહીં, જુઓ કે 2 પુનરાવર્તિત થતો નથી, પરંતુ સંખ્યાજૂથ 35નું પુનરાવર્તન થાય છે. અહીં, બે અંક પુનરાવર્તિત થાય છે. તેથી xને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે.

$\therefore 100x = 23.53535 ...$

$\therefore 100x = 23.3 + 0.23535 ... = 23.3 + x$

એટલે કે, $99x = 23.3$

$99x = \frac{233}{10}$ જેથી $x = \frac{233}{990}$ મળશે.

10. $\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચેની એક અસંમેય સંખ્યા શોધો.

આપણે જોયું કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. આથી એકદમ સરળતાથી $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ મળે.

$\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચે એક અસંમેય સંખ્યા શોધવા માટે એક એવી સંખ્યા લઈએ કે જે આ સંખ્યાઓની વચ્ચે એક અનંત અનાવૃત સંખ્યા હોય. આવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ **0.150150015000150000 ...** છે.

સ્વાધ્યાય 1.3 | પાના નં. 12 – 13

1. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં લખો અને તે કેવા પ્રકારની દશાંશ અભિવ્યક્તિ છે, તે જણાવો :

(i) $\frac{36}{100}$ **(ii)** $\frac{1}{11}$ **(iii)** $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ **(v)** $\frac{2}{11}$ **(vi)** $\frac{329}{400}$

(i) $\frac{36}{100} = \mathbf{0.36}$

$\frac{36}{100}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **સાન્ત** છે.

(ii) $\frac{1}{11}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.0909 \\ \hline 11 & 1.0000 \\ & \underline{99} \\ & 100 \\ & \underline{99} \\ & 1 \end{array}$$

આમ, $\frac{1}{11} = 0.0909 ... = \mathbf{0.\overline{09}}$

$\frac{1}{11}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **અનંત આવૃત્ત** છે.

(iii) $4\frac{1}{8} = \frac{33}{8}$

$$\begin{array}{r|l} & 4.125 \\ \hline 8 & 33.000 \\ & \underline{32} \\ & 10 \\ & \underline{8} \\ & 20 \\ & \underline{16} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & 0 \end{array}$$

આમ, $4\frac{1}{8} = \mathbf{4.125}$

$4\frac{1}{8}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **સાન્ત** છે.

(iv) $\frac{3}{13}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.230769 \\ 13 & 3.000000 \\ & \underline{26} \\ & 40 \\ & \underline{39} \\ & 100 \\ & \underline{91} \\ & 90 \\ & \underline{78} \\ & 120 \\ & \underline{117} \\ & 3 \end{array}$$

આમ, $\frac{3}{13} = 0.230769230769 \ldots = \mathbf{0.\overline{230769}}$

$\frac{3}{13}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **અનંત આવૃત્ત** છે.

(v) $\frac{2}{11}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.18 \\ 11 & 2.00 \\ & \underline{11} \\ & 90 \\ & \underline{88} \\ & 2 \end{array}$$

આમ, $\frac{2}{11} = 0.1818 \ldots = \mathbf{0.\overline{18}}$

$\frac{2}{11}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **અનંત આવૃત્ત** છે.

(vi) $\frac{329}{400}$

$$\begin{array}{r|l} & 0.8225 \\ 400 & 329.0000 \\ & \underline{3200} \\ & 900 \\ & \underline{800} \\ & 1000 \\ & \underline{800} \\ & 2000 \\ & \underline{2000} \\ & 0 \end{array}$$

આમ, $\frac{329}{400} = \mathbf{0.8225}$

$\frac{329}{400}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ **સાન્ત** છે.

2. તમે જાણો છો કે $\frac{1}{7} = \mathbf{0.\overline{142857}}$ છે. શું તમે ખરેખર ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ શું મળશે તેનું અનુમાન કરી શકશો? જો હા, તો કેવી રીતે?

(સૂચન : $\frac{1}{7}$નું મૂલ્ય મેળવતી વખતે મળતી શેષનું અવલોકન કરો.)

ભાગાકારની રીતે $\frac{1}{7}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવતા જોવા મળે છે કે શેષ અનુક્રમે 3, 2, 6, 4, 5 અને 1 આવ્યા બાદ પુનરાવર્તિત થાય છે તથા ભાગફળમાં અંકો 1, 4, 2, 8, 5 અને 7 આવ્યા બાદ પુનરાવર્તિત થાય છે. આથી $\frac{2}{7}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં અંકો 2, 8, 5, 7, 1 અને 4 આવશે અને પુનરાવર્તિત થશે.

આમ,

$\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 2 \times 0.\overline{142857} = \mathbf{0.\overline{285714}}$,

$\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 3 \times 0.\overline{142857} = \mathbf{0.\overline{428571}}$,

$\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 4 \times 0.\overline{142857} = \mathbf{0.\overline{571428}}$,

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 5 \times 0.\overline{142857} = \mathbf{0.\overline{714285}}$,

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 6 \times 0.\overline{142857} = \mathbf{0.\overline{857142}}$.

3. p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં નીચેની સંખ્યાઓને દર્શાવો :

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

(i) $0.\overline{6}$

ધારો કે, $x = 0.\overline{6}$
$\therefore x = 0.6666 \ldots$
$\therefore 10x = 6.6666 \ldots$
$\therefore 10x = 6 + x$
$\therefore 10x - x = 6$
$\therefore 9x = 6$
$\therefore x = \frac{6}{9}$
$\therefore x = \frac{2}{3}$
આમ, $0.\overline{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

(ii) $0.4\overline{7}$

ધારો કે, $x = 0.4\overline{7}$
$\therefore x = 0.4777 \ldots$
$\therefore 10x = 4.7777 \ldots$
$\therefore 10x = 4.3 + 0.4777 \ldots$
$\therefore 10x = 4.3 + x$
$\therefore 9x = 4.3$
$\therefore 9x = \frac{43}{10}$
$\therefore x = \frac{43}{90}$
આમ, $0.4\overline{7} = \mathbf{\frac{43}{90}}$

(iii) $0.\overline{001}$

ધારો કે, $x = 0.\overline{001}$

$\therefore x = 0.001001001 \ldots$

$\therefore 1000x = 1.001001001 \ldots$

$\therefore 1000x = 1 + 0.001001001 \ldots$

$\therefore 1000x = 1 + x$

$\therefore 999x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{999}$

આમ, $0.\overline{001} = \mathbf{\frac{1}{999}}$

4. 0.99999 ... ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. શું તમને તમારા જવાબથી આશ્ચર્ય થાય છે? તમારા શિક્ષક અને વર્ગના સહ-અધ્યાયીઓ સાથે તમારા જવાબની સત્યાર્થતાની ચર્ચા કરો.

ધારો કે, $x = 0.99999 \ldots$

$\therefore 10x = 9.99999 \ldots$

$\therefore 10x = 9 + 0.99999 \ldots$

$\therefore 10x = 9 + x$

$\therefore 9x = 9$

$\therefore x = 1$

આમ, **0.99999 ... = 1**

બીજી રીતે કહીએ તો $0.\overline{9} = 1$.

'યાદ રાખો'માં આપેલ નિયમ $0.\overline{m} = \frac{m}{9}$ મુજબ પણ આપણને $0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ મળે. આ જવાબ આશ્ચર્યજનક લાગે છે. હકીકતમાં એવી કોઈ જ સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ શક્ય નથી જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ $0.\overline{9}$ થાય.

આમ, $0.\overline{9}$ ફક્ત કાલ્પનિક પરિસ્થિતિની સંખ્યા છે.

અનંત આવૃત્ત સંખ્યાઓ $0.\overline{3}$ અને $0.\overline{6}$નો સરવાળો લેતાં $0.\overline{9}$ મળે તેમ લાગે છે, પરંતુ $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$ અને $0.\overline{6} = \frac{2}{3}$ હોવાથી $0.\overline{3} + 0.\overline{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ જ થાય.

5. $\frac{1}{17}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં પુનરાવર્તિત અંકોની સંખ્યા વધુમાં વધુ કેટલી હશે? તમારો જવાબ ભાગાકાર કરીને ચકાસો.

$\frac{1}{17}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં પુનરાવર્તિત અંકોની સંખ્યા વધુમાં વધુ **16 (17 – 1)** હોઈ શકે.

$$
\begin{array}{r|l}
17 & 1.0000000000000000 \\
 & 0.0588235294117647 \\
 & \underline{85} \\
 & 150 \\
 & \underline{136} \\
 & 140 \\
 & \underline{136} \\
 & 40 \\
 & \underline{34} \\
 & 60 \\
 & \underline{51} \\
 & 90 \\
 & \underline{85} \\
 & 50 \\
 & \underline{34} \\
 & 160 \\
 & \underline{153} \\
 & 70 \\
 & \underline{68} \\
 & 20 \\
 & \underline{17} \\
 & 30 \\
 & \underline{17} \\
 & 130 \\
 & \underline{119} \\
 & 110 \\
 & \underline{102} \\
 & 80 \\
 & \underline{68} \\
 & 120 \\
 & \underline{119} \\
 & 1
\end{array}
$$

આમ, $\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$

અહીં, $\frac{1}{17}$ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં $17 - 1 = 16$ અંકો પુનરાવર્તિત થાય છે, પરંતુ દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\frac{1}{m}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં $(m - 1)$ અંકોનું જ પુનરાવર્તન થાય તે સત્ય નથી. દા. ત., $\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$ માં $13 - 1 = 12$ નહીં, પરંતુ ફક્ત 6 અંકોનું જ પુનરાવર્તન થાય છે.

6. જેમાં p અને qને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તથા જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય તેવા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ સ્વરૂપના સંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણ લો. (જ્યાં, p અને q પૂર્ણાંક છે અને $q \neq 0$ છે.) શું તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે q એ કયા ગુણધર્મનું પાલન કરવું જોઈએ?

$\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{10} = 0.1$,

$\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{16} = 0.0625$,

$\frac{1}{25} = 0.04$, $\frac{1}{125} = 0.008$, $\frac{1}{625} = 0.0016$,

$\frac{1}{20} = 0.05$, $\frac{1}{50} = 0.02$ વગેરે.

પરંતુ, $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$ વગેરે.

ઉપરોક્ત ઉદાહરણો પરથી અનુમાન થઈ શકે છે કે સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$માં જો qને 2 અને 5 સિવાયના કોઈ પણ અવિભાજ્ય અવયવો ન હોય તો અને તો જ $\frac{p}{q}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત સ્વરૂપની હોય. બીજા શબ્દોમાં કહી શકાય કે **સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત સ્વરૂપની ત્યારે જ હોય જ્યારે $q = 2^m5^n$ હોય; જ્યાં, m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય.**

7. જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ લખો.

આપણે જાણીએ છીએ કે અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે. અસંમેય સંખ્યાઓ અસંખ્ય (અગણિત) છે. તે પૈકીની ત્રણ અસંમેય સંખ્યાઓ દશાંશ સ્વરૂપમાં નીચે દર્શાવેલ છે :

0.01001000100001 ...,
0.02002000200002 ...,
0.50500500050000 ... .

અસંમેય સંખ્યાઓ જેવી કે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$ વગેરેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ હંમેશાં અનંત અનાવૃત્ત હોય છે.

8. સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{7}$ અને $\frac{9}{11}$ ની વચ્ચે આવેલી ત્રણ ભિન્ન અસંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ અને $\frac{9}{11} = 0.\overline{81}$.

આ બે અનંત આવૃત્ત સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અસંખ્ય અસંમેય સંખ્યાઓ આવેલ છે. તે પૈકીની ત્રણ અસંમેય સંખ્યા નીચે દર્શાવ્યા મુજબની લઈ શકાય :

0.720720072000 ...,
0.750750075000 ...,
0.780780078000 ... .

ઉપરોક્ત સંખ્યાઓની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોવાથી તેઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

9. નીચેની સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો :

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796
(iv) 7.478478 ... (v) 1.101001000100001 ...

(i) $\sqrt{23} : \sqrt{23}$ એ **અસંમેય સંખ્યા** છે.

(ii) $\sqrt{225} : \sqrt{225} = 15$ એ **સંમેય સંખ્યા** છે.

(iii) $0.3796 : 0.3796$ એ **સંમેય સંખ્યા** છે.

(iv) $7.478478 \ldots : 7.478478 \ldots = 7.\overline{478}$ એ **સંમેય સંખ્યા** છે.

(v) 1.101001000100001 ... :
1.101001000100001 એ **અસંમેય સંખ્યા** છે.

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. નીચેની સંખ્યાઓને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$:
(1) $0.\overline{4}$ (2) $0.\overline{43}$ (3) $0.\overline{547}$

2. નીચેની સંખ્યાઓને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$:
(1) $0.6\overline{4}$ (2) $0.7\overline{52}$ (3) $1.3\overline{4}$

3. નીચેની સંખ્યાઓને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$:
(1) $1.\overline{27}$ (2) $2.\overline{8}$ (3) $3.\overline{52}$

4. નીચેની સંખ્યાઓને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$:
(1) $4.0\overline{5}$ (2) $3.6\overline{8}$ (3) $2.5\overline{76}$

5. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં લખો :
(1) $\frac{4}{11}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{37}{110}$

6. $\frac{3}{7}$ અને $\frac{4}{7}$ વચ્ચેની એક અસંમેય સંખ્યા શોધો.

7. સરવાળો કરો : $0.\overline{45} + 0.\overline{23}$

8. સરવાળો કરો : $0.3\overline{6} + 0.2\overline{8}$

જવાબો : 1. (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{43}{99}$ (3) $\frac{547}{999}$

2. (1) $\frac{29}{45}$ (2) $\frac{149}{198}$ (3) $\frac{121}{90}$

3. (1) $\frac{14}{11}$ (2) $\frac{26}{9}$ (3) $\frac{349}{99}$

4. (1) $\frac{73}{18}$ (2) $\frac{166}{45}$ (3) $\frac{2551}{990}$

5. (1) $0.\overline{36}$ (2) $0.\overline{714285}$ (3) $0.3\overline{36}$

6. 0.50500500050000 ...

7. $0.\overline{68}$ અથવા $\frac{68}{99}$

8. $0.6\overline{5}$ અથવા $\frac{59}{90}$

યાદ રાખો

* **અસંમેય સંખ્યાઓની ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ :** બે અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર અસંમેય સંખ્યાઓ જ હોય એવું નથી. આ પરિણામો સંમેય સંખ્યાઓ પણ હોઈ શકે.

  દા. ત.,

  $3+\sqrt{5}$ અને $3-\sqrt{5}$ માટે

  $(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6$, જે સંમેય સંખ્યા છે.

  વળી, $(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=(3)^2-(\sqrt{5})^2$

  $=9-5$

  $=4$, જે સંમેય સંખ્યા છે.

  આમ, અસંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્તતાનો ગુણધર્મ ધરાવતી નથી.

  અસંમેય સંખ્યાઓ સરવાળા તથા ગુણાકાર વિશે ક્રમનો અને જૂથનો ગુણધર્મ ધરાવે છે. વળી (સંમેય સંખ્યાઓની જેમ) વિભાજનનો ગુણધર્મ પણ ધરાવે છે.

* **ધન વાસ્તવિક સંખ્યાના n-મૂળ :** જો a ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તથા n પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય, તો એક અને માત્ર એક જ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે, જેથી $x^n=a$.

  આ સંખ્યા xને aનું ધન n-મૂળ કહે છે તથા $x=\sqrt[n]{a}$ લખાય છે.

* આપણે સ્વીકારીશું કે $0^n=0$ અને $\sqrt[n]{0}=0$ (n પ્રાકૃતિક સંખ્યા)

* $\sqrt{x^2}=|x|$ થાય.

  એટલે કે $\sqrt{36}=6$ લખાય.

  પરંતુ 36નું વર્ગમૂળ (શબ્દોમાં લખાય ત્યારે) 6 અથવા -6 છે.

* જો a, b, c, d ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો

  (1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$

  (2) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

  (3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

  (4) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$

  (5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$

  $=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

  (6) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a\pm2\sqrt{ab}+b$

* **અગત્યનાં તારણો :**

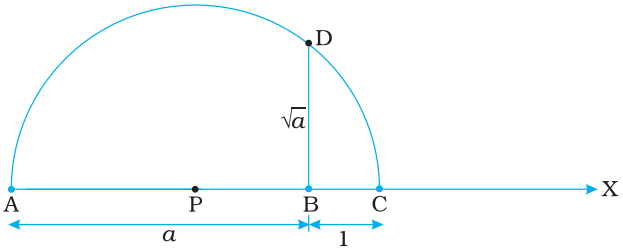
  (1) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાનો અસંમેય સંખ્યા સાથેનો સરવાળો અથવા તફાવત અથવા ગુણાકાર અસંમેય સંખ્યા છે.

  (2) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાને અસંમેય સંખ્યા વડે ભાગતાં ભાગફળ અસંમેય સંખ્યા મળે છે.

  (3) બે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર સંમેય સંખ્યા અથવા અસંમેય સંખ્યા હોઈ શકે.

* **સંમેયીકરણ (Rationalization) :** કોઈ અસંમેય સંખ્યાને શક્ય હોય તો યોગ્ય અસંમેય સંખ્યા વડે ગુણીને ગુણનફળ સંમેય મેળવવાની રીતને સંમેયીકરણ કહે છે.

* **ધન વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\sqrt{a}$ ને ભૌમિતિક રીતે મેળવવાની રચના :**



  (1) કિરણ AX લો.

  (2) $AB=a$ એકમ થાય તેવું બિંદુ B, કિરણ AX ઉપર લો.

  (3) $BC=1$ એકમ થાય તેવું બિંદુ C કિરણ BX પર લો.

  (4) રેખાખંડ ACનું મધ્યબિંદુ P મેળવો.

  (5) Pને કેન્દ્ર લઈ AP જેટલી ત્રિજ્યાવાળું અર્ધવર્તુળ દોરો.

  (6) રેખાખંડ AC પર B આગળ લંબ દોરો, જે અર્ધવર્તુળને Dમાં છેદે.

  (7) $BD=\sqrt{a}$

  નોંધ : આ રચનાથી સાબિત થાય છે કે પ્રત્યેક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\sqrt{a}$નું અસ્તિત્વ છે.

* $\frac{1}{\sqrt{5}}$નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરવું સહેલું નથી, પરંતુ $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ લેવાથી તેનું નિરૂપણ સહેલાઈથી થઈ શકે. અહીં $\sqrt{5}$ને $\sqrt{5}$ વડે ગુણવાથી સંમેય સંખ્યા મળે છે. તેથી $\sqrt{5}$ને $\sqrt{5}$નો સંમેયકારક અવયવ કહે છે. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ તથા $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ બંને પરસ્પરના સંમેયકારક અવયવ છે.

  આમ, જ્યારે કોઈ અભિવ્યક્તિના છેદમાં વર્ગમૂળવાળું પદ (અથવા કરણી ચિહ્નની અંદરની સંખ્યા) હોય ત્યારે જેનો છેદ એક સંમેય સંખ્યા હોય તેવી સમતુલ્ય અભિવ્યક્તિમાં તેને રૂપાંતરિત કરવાની પદ્ધતિને છેદનું સંમેયીકરણ (Rationalising the denominator) કહે છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

11. $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ એ અસંમેય સંખ્યાઓ છે કે નહિ? ચકાસો.

$\sqrt{5} = 2.236\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\pi = 3.1415\ldots$ છે.

તેથી

$7\sqrt{5} = 15.652\ldots$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304\ldots$

થાય.

$\sqrt{2}+21 = 22.4142\ldots$, $\pi-2 = 1.1415\ldots$.

આ બધી સંખ્યાઓ અનંત અનાવૃત્ત દશાંશ અભિવ્યક્તિ છે. તેથી આ બધી સંખ્યાઓ **અસંમેય સંખ્યાઓ** છે.

12. $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ નો સરવાળો કરો.

$(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

$= (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

13. $6\sqrt{5}$ નો $2\sqrt{5}$ સાથે ગુણાકાર કરો.

$6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = \mathbf{60}$

14. $8\sqrt{15}$ નો $2\sqrt{3}$ વડે ભાગાકાર કરો.

$8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \mathbf{4\sqrt{5}}$

15. નીચેના પ્રશ્નોમાં સાદું રૂપ આપો :

(i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5})$

(ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})$

(i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5})$

$= \mathbf{10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}}$

(ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 5^2-(\sqrt{5})^2$

$= 25-5 = \mathbf{20}$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2$

$= 3+2\sqrt{21}+7 = \mathbf{10+2\sqrt{21}}$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{7})^2$

$= 11-7 = \mathbf{4}$

16. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

આપણે જેનો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય એવી એક સમકક્ષ અભિવ્યક્તિમાં $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને દર્શાવીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ સંમેય સંખ્યા છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ વડે ગુણવાથી તેને સમકક્ષ અભિવ્યક્તિ મળે છે, કારણ કે $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ છે. આ બંને તથ્યોને ભેગાં કરીએ તો આપણને $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ મળે. આ સ્વરૂપમાં સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ નું નિરૂપણ કરવું સહેલું થઈ જાય. આ બિંદુ 0 અને $\sqrt{2}$ ને સંગતબિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ છે.

17. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \mathbf{2-\sqrt{3}}$

18. $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$= \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}$

$= \mathbf{\left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

19. $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}$

$= \mathbf{\frac{7-3\sqrt{2}}{31}}$

સ્વાધ્યાય 1.4 | પાના નં. 17 – 18

1. આપેલી સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો :

(i) $2-\sqrt{5}$ **(ii)** $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(v)** 2π

(i) $2-\sqrt{5}$ એ **અસંમેય સંખ્યા** છે, કારણ કે તે સંમેય સંખ્યા 2 અને અસંમેય સંખ્યા $\sqrt{5}$ નો તફાવત છે.

(ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23} = 3+\sqrt{23}-\sqrt{23} = 3$. આથી $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$ એ બે અસંમેય સંખ્યાઓ $(3+\sqrt{23})$ અને $\sqrt{23}$ નો તફાવત હોવા છતાં **સંમેય સંખ્યા** છે.

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{2}{7}$. આથી $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ એ બે અસંમેય સંખ્યાના ગુણોત્તર સ્વરૂપમાં હોવા છતાં **સંમેય સંખ્યા** છે.

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ એ સંમેય સંખ્યા 1 તથા અસંમેય સંખ્યા $\sqrt{2}$ નો ગુણોત્તર હોવાથી **અસંમેય સંખ્યા** છે.

(v) 2π એ **અસંમેય સંખ્યા** છે, કારણ કે
$2 \times \pi = 2 \times 3.1415 \ldots = 6.2830 \ldots$
અનંત અનાવૃત્ત દશાંશ સંખ્યા છે.

2. સાદું રૂપ આપો :

(i) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$

(ii) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

(iv) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

(i) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) = \mathbf{6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

(ii) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = (3)^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = \mathbf{6}$

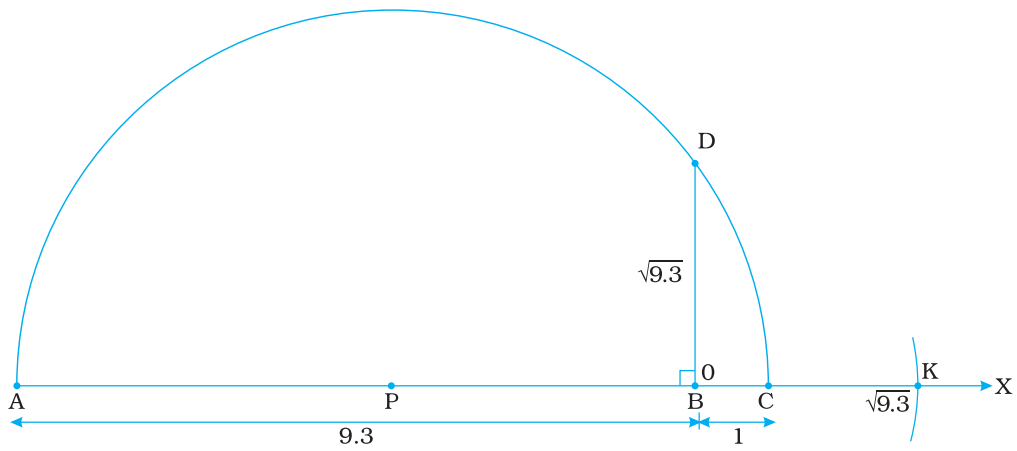
(iii) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
$= 5 + 2\sqrt{10} + 2$
$= \mathbf{7 + 2\sqrt{10}}$

(iv) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$
$= 5 - 2$
$= \mathbf{3}$

3. યાદ કરો કે πને એક વર્તુળના પરિઘ (c) અને તેના વ્યાસ (d)ના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે $\pi = \frac{c}{d}$. તે વિરોધાભાસી છે, કારણ કે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આ વિરોધાભાસનો ઉકેલ કેવી રીતે લાવશો?

πને એક વર્તુળના પરિઘ (c) અને તેના વ્યાસ (d)ના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. ક્રમિક વિપુલદર્શિતાની પદ્ધતિમાં આપણે જોયું કે જેમ જેમ વિપુલદર્શિતાની સંખ્યા વધારતા જઈએ તેમ તેમ વધુ ચોકસાઈ પ્રાપ્ત થાય છે, પરંતુ કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની વચ્ચે અનંત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ રહેલ હોવાથી પરિઘ (c) અને વ્યાસ (d)નું ચોક્કસ માપ જાણવું અશક્ય છે. જો આપણે વિપુલદર્શિતાની સંખ્યા વધારીએ, તો દરેક તબક્કે આ માપમાં થોડો તફાવત આવે જ. એવું પણ શક્ય હોય કે પરિઘ (c) અથવા / અને વ્યાસ (d)નું માપ અસંમેય સંખ્યામાં મળે. આથી જ $\pi = \frac{c}{d}$ હોવા છતાં π એ અસંમેય સંખ્યા છે તેમાં કોઈ જ વિરોધાભાસ નથી.

4. $\sqrt{9.3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.



રચનાના મુદ્દા :

(1) કિરણ AX દોરો.

(2) કિરણ AX પર બિંદુ B એવું લો કે જેથી AB = 9.3 એકમ થાય.

(3) કિરણ BX પર બિંદુ C એવું લો કે જેથી BC = 1 એકમ થાય.

(4) રેખાખંડ ACને Pમાં છેદતો રેખાખંડ ACનો લંબદ્વિભાજક દોરો.

(5) Pને કેન્દ્ર લઈ AP જેટલી ત્રિજ્યાનું એક અર્ધવર્તુળ દોરો.

(6) B બિંદુએ રેખાખંડ ACનો લંબ દોરો જે અર્ધવર્તુળને Dમાં છેદે. રેખાખંડ BDની લંબાઈ $\sqrt{9.3}$ એકમ થશે.

(7) Bને સંગત સંખ્યા 0 લો. Bને કેન્દ્ર લઈ BD જેટલી ત્રિજ્યાનો ચાપ દોરો, જે કિરણ BXને Kમાં છેદે. Kને સંગત સંખ્યા $\sqrt{9.3}$ થશે.

આમ, બિંદુ K દ્વારા $\sqrt{9.3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવેલ છે.

5. આપેલ સંખ્યાઓના છેદનું સંમેયીકરણ કરો :

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ **(ii)** $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. સાદું રૂપ આપો : $5\sqrt{8} - 2\sqrt{32} - 2\sqrt{2}$

2. સાદું રૂપ આપો : $(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$

3. $\sqrt{2} = 1.4142$ હોય, તો $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ની કિંમત શોધો.

4. નીચે આપેલ દરેક સંખ્યામાં છેદનું સંમેયીકરણ કરો :

(1) $\frac{16}{\sqrt{41}-5}$ (2) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (3) $\frac{30}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

(4) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ (5) $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ (6) $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}$

5. નીચે આપેલ દરેક સંખ્યામાં છેદનું સંમેયીકરણ કરી સાદું રૂપ આપો :

(1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{4\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ (3) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$

6. જો $x = 8 + 3\sqrt{7}$ હોય, તો $x^2 + \frac{1}{x^2}$ની કિંમત શોધો.

7. જો $x = 5 + 2\sqrt{6}$ હોય, તો $x^2 + \frac{1}{x^2}$ અને $x^3 + \frac{1}{x^3}$ની કિંમત શોધો.

8. જો $p = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ અને $q = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ હોય, તો $p^2 + q^2$ની કિંમત શોધો.

9. જો $x = 2 + \sqrt{3}$ હોય, તો $x^3 + \frac{1}{x^3}$ની કિંમત શોધો.

10. જો $x = 4 + \sqrt{15}$ હોય, તો $x^2 + \frac{1}{x^2}$ અને $x^3 + \frac{1}{x^3}$ની કિંમત શોધો.

11. સાદું રૂપ આપો :

(1) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$

(4) $\frac{5+\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} - \frac{5-\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$

12. જો $a + 8\sqrt{5}\,b = \frac{8+\sqrt{5}}{8-\sqrt{5}} + \frac{8-\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}$ હોય, તો a અને b શોધો.

13. જો $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}} = a + b\sqrt{30}$ હોય, તો a અને b શોધો.

14. જો $\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = a - \sqrt{b}$ હોય, તો a અને b શોધો.

15. જો $\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$ હોય, તો a અને b શોધો.

16. $\sqrt{5}$ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

17. $\sqrt{6.7}$ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

18. $\sqrt{4.8}$ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

જવાબો : **1.** 0

2. $93 - 24\sqrt{15}$

3. 0.4142

4. (1) $\sqrt{41} + 5$ (2) $2 - \sqrt{3}$ (3) $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$

(4) $17 - 12\sqrt{2}$ (5) $\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

(6) $\sqrt{a^2+b^2} - a$

5. (1) $5 - 2\sqrt{6}$ (2) $\frac{9+4\sqrt{6}}{15}$ (3) $\frac{9+4\sqrt{30}}{21}$

6. 254

7. 98; 970

8. 98

9. 52

10. 62; 488

11. (1) 11 (2) 0 (3) $-8\sqrt{5}$ (4) $54\sqrt{3}$

12. $a = \frac{138}{59}$, $b = 0$

13. $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{4}{21}$

14. $a = 3$, $b = 2$

15. $a = -\frac{61}{29}$, $b = -\frac{24}{29}$

યાદ રાખો

* ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે ઘાતાંકના નિયમો : જો a અને b ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ તથા m અને n સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) (i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $m > n$

(ii) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$; $m < n$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = 1$; $m = n$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

* આપણે સાબિત કરેલું છે કે –

$a^0 = 1$; a શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; a શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા, n પૂર્ણાંક

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; a ધન વાસ્તવિક સંખ્યા, n પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ **અથવા** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

a ધન વાસ્તવિક સંખ્યા, m પૂર્ણાંક અને n પ્રાકૃતિક સંખ્યા

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજનો દાખલો

20. સાદું રૂપ આપો :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ **(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$**

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ **(iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$**

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}$

$= 2^{\frac{3}{3}}$

$= 2^1$

$= \mathbf{2}$

(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = \mathbf{3^{\frac{4}{5}}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)}$

$= 7^{\frac{3-5}{15}}$

$= \mathbf{7^{\frac{-2}{15}}}$

(iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}}$

$= \mathbf{221^{\frac{1}{5}}}$

સ્વાધ્યાય 1.5 પાના નં. 20

1. કિંમત શોધો :

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ **(ii) $32^{\frac{1}{5}}$** **(iii) $125^{\frac{1}{3}}$**

(i) $64^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^{6 \times \frac{1}{2}} = 2^3 = \mathbf{8}$

(ii) $32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = \mathbf{2}$

(iii) $125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \times \frac{1}{3}} = 5^1 = \mathbf{5}$

2. કિંમત શોધો :

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ **(ii) $32^{\frac{2}{5}}$** **(iii) $16^{\frac{3}{4}}$** **(iv) $125^{\frac{-1}{3}}$**

(i) $9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2 \times \frac{3}{2}} = 3^3 = \mathbf{27}$

(ii) $32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^{5 \times \frac{2}{5}} = 2^2 = \mathbf{4}$

(iii) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \times \frac{3}{4}} = 2^3 = \mathbf{8}$

(iv) $125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times \frac{-1}{3}} = 5^{-1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

3. સાદું રૂપ આપો :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ **(ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$**

(iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ **(iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$**

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10+3}{15}} = \mathbf{2^{\frac{13}{15}}}$

(ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7 = (3^{-3})^7 = 3^{-3\times 7} = \mathbf{3^{-21}}$

(iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}} = 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 11^{\frac{2-1}{4}} = \mathbf{11^{\frac{1}{4}}}$

(iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = (7\cdot 8)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{56^{\frac{1}{2}}}$

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. જો $x = 5$ અને $y = 2$ હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો :

(1) $(x^y + y^x)$ (2) $(x^x + y^y)^{-1}$

2. સાદું રૂપ આપો : $[5^2(8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{1}{3}})^3]^{\frac{1}{5}}$

3. કિંમત શોધો : $\left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

4. કિંમત શોધો : $3\sqrt[3]{40} - 4\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{5}$

5. સાદું રૂપ આપો : $\frac{(25)^{\frac{3}{2}} \times (343)^{\frac{1}{5}}}{16^{\frac{5}{4}} \times 8^{\frac{4}{3}} \times 7^{\frac{3}{5}}}$

6. કિંમત શોધો : $\left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{\left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt[3]{64}}$

7. જો $a = \frac{\sqrt{3}}{7}$ અને $\frac{7}{a} = b\sqrt{3}$ હોય, તો bની કિંમત શોધો.

8. જો $(4)^{2x-1} - (16)^{x-1} = 384$ હોય, તો xની કિંમત શોધો.

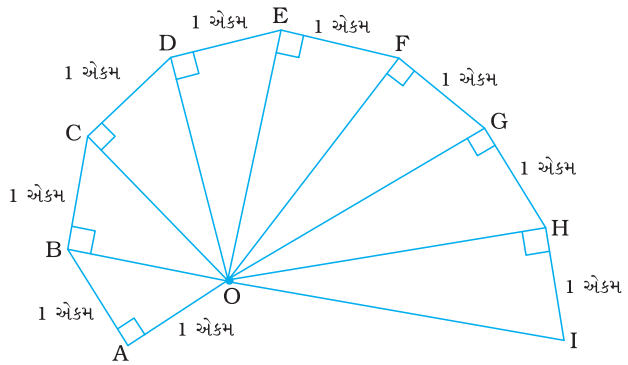
9. નીચેનું પરિણામ સાબિત કરો :

$$\left(\frac{2^a}{2^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{2^b}{2^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{2^c}{2^a}\right)^{c+a} = 1$$

10. નીચેની સંખ્યાઓને તેમની કિંમત મુજબ ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો : $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$

11. જો $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{16}{9}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+2}$ હોય, તો xની કિંમત શોધો.

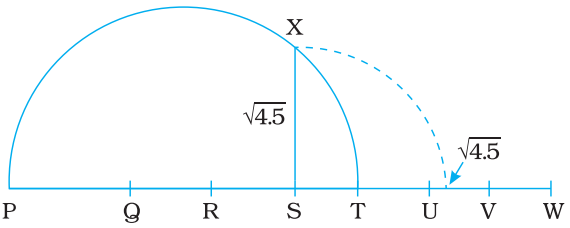
12. દીપે એક કાગળ પર નીચે મુજબના વર્ગમૂળ કુંતલની રચના કરી છે :



રેખાખંડ OEનું માપ કેટલું થાય?

13. $\frac{1}{-4-\sqrt{15}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરવાથી કઈ સંખ્યા મળે?

14. વસ્તુ સંખ્યારેખા PW પર $\sqrt{4.5}$ નું નિરૂપણ નીચે મુજબ કરે છે. રેખાખંડ TSની લંબાઈ 1 એકમ છે.



સંખ્યારેખા પરના કયા બિંદુને સંગત સંખ્યા 0 (શૂન્ય) છે?

15. ઉપરોક્ત પ્રશ્નની આકૃતિના સંદર્ભે $\sqrt{5.2}$ નું નિરૂપણ કયા બે બિંદુ વચ્ચે થશે?

16. જો xના વર્ગની કિંમત 5 હોય, તો $4x$ના વર્ગની કિંમત કેટલી થાય?

17. મનનની ઊંચાઈમાં છેલ્લા એક વર્ષમાં 10 %નો વધારો થયો છે. તેની એક વર્ષ પહેલાંની ઊંચાઈ અને હાલની ઊંચાઈનો ગુણોત્તર શોધો.

18. xની શક્ય કિંમતો : 2, 4, 6, 8, 10

yની શક્ય કિંમતો : 3, 5, 7, 9, 11

zની શક્ય કિંમતો : 5, 10, 15, 20, 25

ઉપરોક્ત શક્ય કિંમતોના આધારે જો $\frac{z-y}{x}$ની કિંમત ગણવામાં આવે, તો મહત્તમ કિંમત કેટલી મળે?

જવાબો : **1.** (1) 57 (2) $\frac{1}{3129}$

2. 5 **3.** 9 **4.** $-11\sqrt[3]{5}$

5. $\frac{125}{512}$ **6.** $\frac{65}{16}$ **7.** $\frac{49}{3}$

8. $\frac{11}{4}$ **10.** $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$ **11.** 2

12. $\sqrt{5}$ એકમ **13.** $-4+\sqrt{15}$

14. S **15.** U અને V **16.** 80

17. 10 : 11 **18.** 11

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) જો $x^{5m-2} = 1$ હોય, તો m = ... $\left(0, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$

(2) 3^{-3} = ... $(27, -27, \frac{1}{27})$

(3) $\sqrt{289}$ = ... $(17, 18, 19)$

(4) 121નું વર્ગમૂળ ..... છે.

$(11, -11, 11$ અથવા $-11)$

(5) $3 + \sqrt{7}$ નો સંમેયકારક અવયવ ..... છે.

$(3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}, \sqrt{3} + 7)$

(6) $8 + \sqrt{15}$ નો સંમેયકારક અવયવ ..... છે.

$(8 + \sqrt{15}, 8 - \sqrt{15}, \sqrt{8} + 15)$

(7) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ ની કિંમત ..... થાય. $\left(\frac{9}{25}, \frac{9}{5}, \frac{25}{9}\right)$

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) જો $x^{\frac{1}{8}} = 49^{\frac{1}{16}}$ હોય, તો xની કિંમત શોધો.

(2) $\sqrt{162} \div \sqrt{18}$ ની કિંમત શોધો.

(3) $0.\overline{27}$નું $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપ શું થાય?

(4) $\frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{6}}$ના છેદનો સંમેયકારક અવયવ જણાવો.

(5) નાનામાં નાની પૂર્ણ સંખ્યા જણાવો.

(6) $2.5 \times 0.2 \times 0.2$ની કિંમત શોધો.

(7) $0.\overline{53}$નું $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપ શું થાય?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) $3.1\overline{23}$ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ..... લખાય.

A. $\frac{3123}{999}$ B. $\frac{3123}{1000}$ C. $\frac{1546}{495}$ D. $\frac{3123}{100}$

(2) $-\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}$ એ ..... સંખ્યા છે.

A. અસંમેય B. ઋણ પૂર્ણાંક C. ઘન પૂર્ણાંક D. સંમેય

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ એ ..... સંખ્યા છે.

A. પૂર્ણાંક B. અસંમેય C. સંમેય D. પૂર્ણ

(4) જો $\sqrt[n]{a^2} = b$ હોય, તો b^{2n} = ...

A. a B. $a^{\frac{n}{2}}$ C. a^{2n} D. a^4

(5) $\frac{5}{6}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ ..... છે.

A. અનંત આવૃત્ત B. અનંત અનાવૃત્ત

C. પૂર્ણાંક D. સાન્ત

(6) નીચેના પૈકી ..... સંમેય સંખ્યા છે.

A. $\sqrt{6}$ B. π C. 0.333 ... D. $2\frac{1}{3}$

(7) જો m અને n પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ હોય, તો ..... એ હંમેશાં પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા થાય.

A. $m + n$ B. $2m$ C. $4n$ D. $m^2 + n^2$

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) $\sqrt{\frac{36}{25}}$ એ સંમેય સંખ્યા છે.

(2) π એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(3) 5.92222 ...ને બીજી રીતે $5.\overline{92}$ લખાય.

(4) $\frac{5}{19}$ અને $\frac{11}{19}$ની વચ્ચે 5 સંમેય સંખ્યાઓ આવેલ છે.

(5) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

(6) 3.484848 ...ને બીજી રીતે $3.\overline{48}$ લખાય.

(7) $\frac{1}{6 + \sqrt{35}} = 6 - \sqrt{35}$

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. 4^6 =	a. $\frac{1}{8}$
2. $2^7 \times 2^3$ =	b. 8
3. 2^{-3} =	c. $5 - \sqrt{7}$
4. $\frac{2^{10}}{4^3}$ =	d. 2^{12}
5. $5 + \sqrt{7}$ નો સંમેયકારક અવયવ	e. $5 + \sqrt{21}$
6. $3 - \sqrt{2}$ નો સંમેયકારક અવયવ	f. 2^{10}
7. $\frac{1}{4 + \sqrt{7}}$ના છેદનો સંમેયકારક અવયવ	g. $3 + \sqrt{2}$
8. $\frac{4}{5 - \sqrt{21}}$નું સાદું રૂપ	h. $\sqrt{5} - 7$
	i. 2^4
	j. $4 - \sqrt{7}$

જવાબો

1. (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{27}$ (3) 17 (4) 11 અથવા -11 (5) $3-\sqrt{7}$ (6) $8-\sqrt{15}$ (7) $\frac{25}{9}$

2. (1) 7 (2) 3 (3) $\frac{3}{11}$ (4) $\sqrt{11}+\sqrt{6}$ (5) 0 (6) 0.1 (7) $\frac{53}{99}$

3. (1) C. $\frac{1546}{495}$ (2) D. સંમેય (3) B. અસંમેય (4) D. a^4 (5) A. અનંત આવૃત્ત (6) C. 0.333 ... (7) C. $4n$

4. (1) ખરું (2) ખરું (3) ખોટું (4) ખોટું (5) ખોટું (6) ખરું (7) ખરું

5. $1 \to d$, $2 \to f$, $3 \to a$, $4 \to i$, $5 \to c$, $6 \to g$, $7 \to j$, $8 \to e$.

2 બહુપદીઓ (POLYNOMIALS)

યાદ રાખો

* **ચલ (Variable) :** જે ભિન્ન કિંમતો ધારણ કરી શકે તેવી સંજ્ઞાને ચલ કહે છે. સામાન્ય રીતે ચલને x, y, z વગેરે સંકેતથી દર્શાવાય છે.
* **બૈજિક પદાવલિઓ (Algebraic expressions) :** બૈજિક પદાવલિ એ ચલ અને અચળને સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર કે ભાગાકારની ક્રિયાથી સાંકળતાં મળે છે.

  દા. ત., $2x + 3$, $4 - 7x$, $\frac{x}{3}$ વગેરે.
* **એકચલ બહુપદીઓ :** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$; $a_n \neq 0$, a_0, a_1, a_2, ..., a_n અચળ હોય, ત્યારે આ સ્વરૂપે દર્શાવાતી પદાવલિને ચલ xમાં બહુપદી કહે છે; જ્યાં n પૂર્ણ સંખ્યા છે.

  સામાન્ય રીતે બહુપદીઓ $p(x)$, $q(x)$ ... જેવા સંકેતથી દર્શાવાય છે.

  → અહીં, $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ..., a_0 બહુપદીનાં પદો છે.

  → a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ એ x^i ના સહગુણક છે.

  → આ બહુપદીમાં x^n એ xનો મહત્તમ ઘાત છે.

  → $a_n x^n$ને બહુપદીનું અગ્રપદ કહે છે.

  → a_nને અગ્રસહગુણક કહે છે.

  જ્યારે બહુપદીનાં પદોને xના ઊતરતા ઘાતાંકના ક્રમમાં ગોઠવીએ ત્યારે તે બહુપદી પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખેલ છે તેમ કહેવાય.
* **બહુપદીની ઘાત (Degree of the polynomial) :** જ્યારે બહુપદી પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખેલી હોય, ત્યારે તેનું પ્રથમ પદ અગ્રપદ છે અને તેમાં ચલનો ઘાતાંક એ બહુપદીની ઘાત કહેવાય.
* **અચળ બહુપદી :** $p(x) = a_0$ને અચળ બહુપદી કહે છે. જ્યાં, a_0 અચળ સંખ્યા છે.
* **એકપદી (Monomial) :** જે બહુપદીમાં માત્ર એક જ પદ હોય તેને એકપદી કહે છે.
* **દ્વિપદી (Binomial) :** જે બહુપદીમાં બે પદો હોય તેને દ્વિપદી કહે છે.
* **ત્રિપદી (Trinomial) :** જે બહુપદીમાં ત્રણ પદો હોય તેને ત્રિપદી કહે છે.

બહુપદી	વ્યાખ્યા	વ્યાપક સ્વરૂપ	ઘાત	ઉદાહરણ
શૂન્ય બહુપદી	અચળ બહુપદી 0ને શૂન્ય બહુપદી કહે છે.	0	અવ્યાખ્યાયિત	0
અચળ બહુપદી	જે બહુપદીની ઘાત 0 હોય, તે બહુપદીને અચળ બહુપદી કહે છે.	$p(x) = k$; જ્યાં, k શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યા છે.	0	7, $-\frac{3}{7}$
એકઘાત બહુપદી (સુરેખ બહુપદી)	જે બહુપદીની ઘાત 1 હોય, તે બહુપદીને સુરેખ બહુપદી કહે છે.	$p(x) = ax + b$; જ્યાં, $a \neq 0$ અને a, b વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.	1	$5x - 2$, $7x + 3$, $\frac{x}{2}$
દ્વિઘાત બહુપદી	જે બહુપદીની ઘાત 2 હોય, તે બહુપદીને દ્વિઘાત બહુપદી કહે છે.	$p(x) = ax^2 + bx + c$; જ્યાં, $a \neq 0$ અને a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.	2	$3x^2 - 4x + 2$, $6 - 8x + 9x^2$
ત્રિઘાત બહુપદી	જે બહુપદીની ઘાત 3 હોય, તે બહુપદીને ત્રિઘાત બહુપદી કહે છે.	$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; જ્યાં, $a \neq 0$ અને a, b, c, d વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.	3	$2x^3 - 5x^2 + x - 3$, $4x - 6 + 7x^3 + x^2$

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજનો દાખલો

1. નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો :

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

(i) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 5 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત **5** છે.

(ii) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 8 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત **8** છે.

(iii) અહીં એક જ પદ 2 છે. તેને $2x^0$ તરીકે પણ લખી શકાય છે. તેથી xનો ઘાતાંક 0 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત **0** છે.

સ્વાધ્યાય 2.1 | પાના નં. 26

1. નીચે આપેલી અભિવ્યક્તિઓ પૈકી કઈ બહુપદી એકચલવાળી છે અને કઈ બહુપદી એકચલવાળી નથી? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

(i) $4x^2 - 3x + 7$ એ **એકચલવાળી બહુપદી છે**, કારણ કે તેના દરેક પદમાં ચલ xનો ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા (અનુક્રમે 2, 1 અને 0) છે.

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$ એ **એકચલવાળી બહુપદી છે,** કારણ કે તેના દરેક પદમાં ચલ yનો ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા છે.

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ એ **એકચલવાળી બહુપદી નથી,** કારણ કે તેના પ્રથમ પદમાં ચલ tનો ઘાતાંક $\frac{1}{2}$ છે, જે પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

(iv) $y + \frac{2}{y} = y + 2y^{-1}$ એ **એકચલવાળી બહુપદી નથી,** કારણ કે તેના દ્વિતીય પદમાં ચલ yનો ઘાતાંક -1 છે, જે પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$ એ બહુપદી છે, કારણ કે તેના દરેક પદમાં ચલ x, y અને tના ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા છે, પરંતુ એ **એકચલવાળી બહુપદી ન હોઈ ત્રિચલ બહુપદી છે.**

2. નીચેનામાં x^2નો સહગુણક લખો :

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

(i) $2 + x^2 + x$માં x^2નો સહગુણક **1** છે.

(ii) $2 - x^2 + x^3$માં x^2નો સહગુણક **-1** છે.

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$માં x^2નો સહગુણક $\frac{\pi}{2}$ છે.

(iv) $\sqrt{2}x - 1$માં x^2નો સહગુણક **0** છે, કારણ કે આપેલ પદાવલિમાં x^2વાળું પદ છે જ નહીં.

3. 35 ઘાતાંકવાળી દ્વિપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ અને 100 ઘાતાંકવાળી એકપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ આપો.

$4x^{35} - 2$, $\sqrt{5}x^{35} + 11$, $7x^{35} - \sqrt{3}x$ એ 35 ઘાતાંકવાળી દ્વિપદીનાં થોડાંક ઉદાહરણ છે. તે જ રીતે, **$7x^{100}$, $\sqrt{2}x^{100}$, $4\pi x^{100}$** એ 100 ઘાતાંકવાળી એકપદીનાં થોડાંક ઉદાહરણ છે.

4. નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો :

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

(i) બહુપદી $5x^3 + 4x^2 + 7x$નો ઘાત **3** છે.

(ii) બહુપદી $4 - y^2$નો ઘાત **2** છે.

(iii) બહુપદી $5t - \sqrt{7}$ નો ઘાત **1** છે.

(iv) અચળ બહુપદી 3નો ઘાત **0** છે.

5. નીચે આપેલી બહુપદીઓને સુરેખ, દ્વિઘાત કે ત્રિઘાત બહુપદીમાં વર્ગીકૃત કરો :

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$

(iv) $1 + x$ (v) $3t$ (vi) r^2

(vii) $7x^3$

(i) બહુપદી $x^2 + x$નો ઘાત 2 હોવાથી તે **દ્વિઘાત બહુપદી** છે.

(ii) બહુપદી $x - x^3$નો ઘાત 3 હોવાથી તે **ત્રિઘાત બહુપદી** છે.

(iii) બહુપદી $y + y^2 + 4$નો ઘાત 2 હોવાથી તે **દ્વિઘાત બહુપદી** છે.

(iv) બહુપદી $1 + x$નો ઘાત 1 હોવાથી તે **સુરેખ બહુપદી** છે.

(v) બહુપદી $3t$નો ઘાત 1 હોવાથી તે **સુરેખ બહુપદી** છે.

(vi) બહુપદી r^2નો ઘાત 2 હોવાથી તે **દ્વિઘાત બહુપદી** છે.

(vii) બહુપદી $7x^3$નો ઘાત 3 હોવાથી તે **ત્રિઘાત બહુપદી** છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. નીચે આપેલ બહુપદીઓ એકચલવાળી બહુપદી છે કે નહીં તે જણાવો :

(1) $5x^2 - 3x + 7$ (2) $16x^2 - 49y^2$

(3) $\sqrt{7}\,x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 9x + 17$

(4) $7t^2 - 5t + 3$ (5) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. નીચેની દરેક બહુપદીમાં x^2નો સહગુણક જણાવો :

(1) $-3x^2 + 5x + 11$

(2) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

(3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(4) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x - 4\sqrt{2}$

(5) $x^4 + 5x^3 + \pi x^2 - 3x + 11$

3. 50 ઘાતવાળી દ્વિપદી તથા 80 ઘાતવાળી એકપદીના એક-એક ઉદાહરણ આપો.

4. નીચે આપેલ બહુપદીઓની ઘાત જણાવો :

(1) $4x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

(2) $\sqrt{2}\,x^2 - 5x^3 + 7x + \frac{1}{4}$

(3) $5 - 4x + x^2$

(4) $\pi x^3 + 5x^5 + 7x^2 - 12$

(5) $81 - 16x^2$

5. નીચે આપેલી બહુપદીઓને સુરેખ બહુપદી, દ્વિઘાત બહુપદી અને ત્રિઘાત બહુપદીમાં વર્ગીકૃત કરો :

(1) $5x - 3$ (2) $2x^2 + 11x - 9$

(3) $8x^3 - 27$ (4) $4x - 9x^2 + 3$

(5) $9t^2$ (6) $27z^3$

(7) $7 - \sqrt{3}\,x$ (8) $4y$

જવાબો : 1. (1) છે (2) નથી (3) છે (4) છે (5) નથી

2. (1) -3 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 3 (4) $\sqrt{2}$ (5) π

3. (1) $3x^{50} - 17x^{25}$ (2) $\sqrt{3}\,y^{80}$

4. (1) 3 (2) 3 (3) 2 (4) 5 (5) 2

5. (1) સુરેખ બહુપદી (2) દ્વિઘાત બહુપદી (3) ત્રિઘાત બહુપદી (4) દ્વિઘાત બહુપદી (5) દ્વિઘાત બહુપદી (6) ત્રિઘાત બહુપદી (7) સુરેખ બહુપદી (8) સુરેખ બહુપદી

યાદ રાખો

બહુપદીનાં શૂન્યો :

* જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $p(x) = 0$ હોય, તો તે xને બહુપદી $p(x)$નું શૂન્ય કહે છે.
* બહુપદી $p(x)$નાં શૂન્યો(જો તેઓ અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોય તો)ને બહુપદી સમીકરણ $p(x) = 0$નાં બીજ (Roots) (અથવા ઉકેલ) કહે છે.

દા. ત., બહુપદી $p(x) = 5x + 7$નું એક શૂન્ય $-\frac{7}{5}$ છે.

કારણ કે, $p\left(-\frac{7}{5}\right) = 5\left(-\frac{7}{5}\right) + 7$

$= -7 + 7 = 0$

→ બહુપદી $p(x) = x^2 + 1$ માટે $x^2 + 1 = 0$ થાય તેવો કોઈ વાસ્તવિક x શક્ય નથી.

આથી $x^2 + 1 = 0$નાં બીજ કે ઉકેલ શક્ય નથી.

ઘણી વાર બહુપદીને વાસ્તવિક શૂન્ય ન પણ હોય.

* **બહુપદીનાં શૂન્યો માટેનાં અગત્યનાં પરિણામો :**

(1) 0 એ બહુપદીનું શૂન્ય હોઈ શકે, પરંતુ બહુપદીનાં શૂન્યો એ 0 ન પણ હોય.

(2) સુરેખ બહુપદી અનન્ય શૂન્ય ધરાવે.

(3) સુરેખ બહુપદી સિવાયની બહુપદીઓને એક કરતાં વધારે શૂન્ય હોઈ શકે.

* **બહુપદીનું મૂલ્ય :** બહુપદી $p(x)$માં xના સ્થાને કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા α લેવાથી $p(x)$ની જે કિંમત મળે તેને $p(x)$નું α માટેનું મૂલ્ય કહે છે. તેને $p(\alpha)$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

2. નીચે આપેલી બહુપદીઓનું મૂલ્ય બહુપદીની ચલની સામે દર્શાવેલ કિંમતો માટે શોધો :

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ આગળ

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ આગળ

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ આગળ

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ આગળ બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = \mathbf{9}$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ આગળ બહુપદી $q(y)$નું મૂલ્ય,

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11}$

$= 24 - 8 + \sqrt{11} = \mathbf{16 + \sqrt{11}}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ આગળ બહુપદી $p(t)$નું મૂલ્ય,

$p(a) = \mathbf{4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6}$

3. ચકાસો કે -2 અને 2 બહુપદી $x + 2$નાં શૂન્યો છે કે નહીં.

ધારો કે, $p(x) = x + 2$

$p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

તેથી -2 એ બહુપદી $x + 2$નું **શૂન્ય** છે પણ 2 એ બહુપદી $x + 2$નું **શૂન્ય નથી.**

4. બહુપદી $p(x) = 2x + 1$નાં શૂન્ય શોધો.

ધારો કે, $p(x) = 0$

હવે, $2x + 1 = 0$ લેતાં, $x = -\frac{1}{2}$

તેથી $-\frac{1}{2}$ એ બહુપદી $2x + 1$નું શૂન્ય છે.

5. ચકાસો કે 2 અને 0 બહુપદી $x^2 - 2x$નાં શૂન્ય છે.

ધારો કે, $p(x) = x^2 - 2x$

તેથી $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

અને $p(0) = 0 - 0 = 0$

આથી 2 અને 0 બંને બહુપદી $x^2 - 2x$નાં **શૂન્યો છે.**

સ્વાધ્યાય 2.2 પાના નં. 28 – 29

1. xની નીચેની કિંમતો માટે $5x - 4x^2 + 3$ બહુપદીનું મૂલ્ય શોધો :

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

અહીં, $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

(i) $x = 0$ માટે બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 0 + 0 + 3 = \mathbf{3}$

(ii) $x = -1$ માટે બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$

$= -5 - 4 + 3 = \mathbf{-6}$

(iii) $x = 2$ માટે બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3$

$= 10 - 16 + 3 = \mathbf{-3}$

2. નીચે આપેલ દરેક બહુપદી માટે $p(0)$, $p(1)$ અને $p(2)$ શોધો :

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

$\therefore p(0) = 0^2 - 0 + 1 = \mathbf{1}$

$\therefore p(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = \mathbf{1}$

$\therefore p(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = \mathbf{3}$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$\therefore p(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = \mathbf{2}$

$\therefore p(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3$

$= 2 + 1 + 2 - 1$

$= \mathbf{4}$

$\therefore p(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$

$= 2 + 2 + 8 - 8$

$= \mathbf{4}$

(iii) $p(x) = x^3$

$\therefore p(0) = (0)^3 = \mathbf{0}$

$\therefore p(1) = (1)^3 = \mathbf{1}$

$\therefore p(2) = (2)^3 = \mathbf{8}$

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

$\therefore p(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1) \times 1 = \mathbf{-1}$

$\therefore p(1) = (1 - 1)(1 + 1) = 0 \times 2 = \mathbf{0}$

$\therefore p(2) = (2 - 1)(2 + 1) = 1 \times 3 = \mathbf{3}$

3. નીચેની બહુપદીની સામે દર્શાવેલ xની કિંમતો એ આપેલ બહુપદીનાં શૂન્યો છે કે નહિ, તે ચકાસો :

(i) $p(x) = 3x + 1$, $x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi$, $x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1$, $x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$, $x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2$, $x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m$, $x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1$, $x = \frac{1}{2}$

(i) અહીં, $p(x) = 3x + 1$

$\therefore p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

આથી $x = -\frac{1}{3}$ એ બહુપદી $3x + 1$નું **શૂન્ય છે.**

(ii) અહીં, $p(x) = 5x - \pi$

$\therefore p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$

આથી $x = \frac{4}{5}$ એ બહુપદી $5x - \pi$નું **શૂન્ય નથી.**

(iii) અહીં, $p(x) = x^2 - 1$

$\therefore p(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ અને

$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

આથી $x = 1$ અને $x = -1$ બંને બહુપદી $x^2 - 1$નાં **શૂન્યો છે.**

(iv) અહીં, $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$\therefore p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = 0 \times (-3) = 0$

અને $p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3 \times 0 = 0$

આથી $x = -1$ અને $x = 2$ બંને બહુપદી $(x + 1)(x - 2)$નાં **શૂન્યો છે.**

(v) અહીં, $p(x) = x^2$

$\therefore p(0) = (0)^2 = 0$

આથી $x = 0$ એ બહુપદી x^2નું **શૂન્ય છે.**

(vi) અહીં, $p(x) = lx + m$

$\therefore p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$

આથી $x = -\frac{m}{l}$ એ બહુપદી $lx + m$નું **શૂન્ય છે.**

(vii) અહીં, $p(x) = 3x^2 - 1$

$\therefore p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$

$= 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

અને $p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$

$= 3\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$

આથી $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ એ બહુપદી $3x^2 - 1$નું **શૂન્ય છે,**

પરંતુ $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ એ બહુપદી $3x^2 - 1$નું **શૂન્ય નથી.**

(viii) અહીં, $p(x) = 2x + 1$

$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

આથી $x = \frac{1}{2}$ એ બહુપદી $2x + 1$નું **શૂન્ય નથી.**

4. નીચે આપેલી દરેક બહુપદીનાં શૂન્યો શોધો :

(i) $p(x) = x + 5$ **(ii) $p(x) = x - 5$**

(iii) $p(x) = 2x + 5$ **(iv) $p(x) = 3x - 2$**

(v) $p(x) = 3x$ **(vi) $p(x) = ax$, $a \neq 0$**

(vii) $p(x) = cx + d$, $c \neq 0$, c અને d એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

બહુપદી $p(x)$નાં શૂન્યો શોધવા આપણે સમીકરણ $p(x) = 0$ના ઉકેલ શોધવા જોઈએ.

(i) $p(x) = x + 5$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$x + 5 = 0$

$\therefore x = -5$

આમ, **-5** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = x + 5$નું શૂન્ય છે.

(ii) $p(x) = x - 5$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$x - 5 = 0$

$\therefore x = 5$

આમ, **5** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = x - 5$નું શૂન્ય છે.

(iii) $p(x) = 2x + 5$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$2x + 5 = 0$

$\therefore 2x = -5$

$\therefore x = -\frac{5}{2}$

આમ, **$-\frac{5}{2}$** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = 2x + 5$નું શૂન્ય છે.

(iv) $p(x) = 3x - 2$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$3x - 2 = 0$

$\therefore 3x = 2$

$\therefore x = \frac{2}{3}$

આમ, **$\frac{2}{3}$** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = 3x - 2$નું શૂન્ય છે.

(v) $p(x) = 3x$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$3x = 0$

$\therefore x = 0$

આમ, **0** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = 3x$ નું શૂન્ય છે.

(vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

$p(x) = 0$ લેતાં,

$ax = 0$

$\therefore x = \frac{0}{a}$ $(\because a \neq 0)$

$\therefore x = 0$

આમ, **0** એ આપેલ બહુપદી $p(x) = ax$ નું શૂન્ય છે.

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c$ અને d એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

$p(x) = 0$ લેતાં,

$cx + d = 0$

$\therefore cx = -d$

$\therefore x = -\frac{d}{c}$

આમ, $-\frac{d}{c}$ એ આપેલ બહુપદી $p(x) = cx + d$નું શૂન્ય છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. xની નીચે આપેલ કિંમતો માટે બહુપદી $x^2 - 7x + 12$નું મૂલ્ય શોધો :

(1) $x = 1$ (2) $x = 3$ (3) $x = 5$ (4) $x = 0$

2. નીચે આપેલ દરેક બહુપદી માટે $p(0),\ p(1)$ તથા $p(3)$ શોધો :

(1) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(2) $p(y) = y^2 - 9$

(3) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x - 1$

(4) $p(t) = t^3 + 2t^2 + t - 4$

3. નીચેની દરેક બહુપદીની સામે આપેલ xની કિંમત એ આપેલ બહુપદીનાં શૂન્યો છે કે નહિ, તે ચકાસો :

(1) $p(x) = x^2 - 5x + 4;\ x = 1,\ 4$

(2) $p(x) = 4x - 1;\ x = 4,\ \frac{1}{4}$

(3) $p(x) = x^2 + 7x + 6;\ x = -1,\ -6$

(4) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x = 1,\ -1,\ -2,\ 2$

(5) $p(x) = x^2 - 8x + 15;\ x = 3,\ 5$

4. નીચે આપેલ દરેક બહુપદીનું શૂન્ય શોધો :

(1) $p(x) = 4x - 7$ (2) $p(x) = 3x + 5$

(3) $p(y) = 11y - 44$ (4) $p(t) = \pi t + 7$

(5) $p(x) = -3x + 8$ (6) $p(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$

જવાબો : 1. (1) 6 (2) 0 (3) 2 (4) 12

2. (1) $p(0) = 3,\ p(1) = 0,\ p(3) = 0$

(2) $p(0) = -9,\ p(1) = -8,\ p(3) = 0$

(3) $p(0) = -1,\ p(1) = \frac{10}{3},\ p(3) = 14$

(4) $p(0) = -4,\ p(1) = 0,\ p(3) = 44$

3. (1) $p(1) = 0,\ p(4) = 0$

(2) $p(4) = 15,\ p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

(3) $p(-1) = 0,\ p(-6) = 0$

(4) $p(1) = 0,\ p(-1) = 0,\ p(-2) = 0,\ p(2) = 12$

(5) $p(3) = 0,\ p(5) = 0$

4. (1) $\frac{7}{4}$ (2) $-\frac{5}{3}$ (3) 4

(4) $-\frac{7}{\pi}$ (5) $\frac{8}{3}$ (6) $\frac{5}{4}$

યાદ રાખો

* **શેષ પ્રમેય :** જો બહુપદી $p(x)$ની ઘાત 1 કે 1 કરતાં વધુ હોય અને તેને સુરેખ બહુપદી $(x - a)$ વડે ભાગવામાં આવે, તો શેષ $p(a)$ મળે. અહીં a વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
* જો $p(a) = 0$, તો બહુપદી $p(x)$ એ ભાજક $(x - a)$ વડે વિભાજ્ય છે અને શેષ 0 છે. $(x - a)$ને તે બહુપદીનો એક અવયવ ગણવામાં આવે છે. (a વાસ્તવિક સંખ્યા છે.)
* **અવયવ પ્રમેય :** જો બહુપદી $p(x)$ની ઘાત એક કે તેનાં કરતાં વધુ હોય અને a વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો

(i) જો $p(a) = 0$ હોય, તો $x - a$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે. અને

(ii) જો $x - a$ એ $p(x)$નો અવયવ હોય, તો $p(a) = 0$.

સાબિતી : શેષ પ્રમેય પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $p(x) = (x - a)\,q(x) + p(a)$.

(i) જો $p(a) = 0$, તો $p(x) = (x - a)\ q(x)$.

આથી $x - a$ એ $p(x)$નો અવયવ છે.

(ii) વળી, $x - a$ એ $p(x)$નો અવયવ હોય, તો કોઈક બહુપદી $g(x)$ માટે $p(x) = (x - a)\ g(x)$. હવે, $p(a) = (a - a)\ g(a) = 0$.

* જો $p(x)$ના સહગુણકોનો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો અને તો જ $(x-1)$ એ $p(x)$નો અવયવ થાય.
* $p(x)$માં જો xના અયુગ્મ ઘાતાંકવાળાં પદોના સહગુણકોનો સરવાળો એ xના યુગ્મ ઘાતાંકવાળાં પદોના સહગુણકોના સરવાળા જેટલો થાય, તો અને તો જ $(x+1)$ એ $p(x)$નો અવયવ થાય.
* તમે દ્વિઘાત બહુપદી x^2+lx+mના અવયવો કેવી રીતે પાડવા તે જાણો છો. તેના મધ્યમ પદ lxને વિભાજિત કરીને તમે અવયવો મેળવેલ. $ab=m$ બને તે રીતે મધ્યમ પદ $lx=ax+bx$ તરીકે વિભાજિત થાય. પછી $x^2+lx+m=(x+a)(x+b)$. ચાલો આપણે દ્વિઘાત બહુપદી ax^2+bx+c; જ્યાં, $a\neq 0$ અને a, b, c અચળ છે, ના અવયવો પાડવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને બહુપદી ax^2+bx+c ના અવયવો મેળવવાની રીત નીચે પ્રમાણે છે :

ધારો કે, તેના અવયવો $(px+q)$ અને $(rx+s)$ છે.

$$ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)$$
$$=pr\,x^2+(ps+qr)\,x+qs$$

x^2ના સહગુણકોને સરખાવતાં, $a=pr$.

તે જ પ્રમાણે xના સહગુણકોને સરખાવતાં $b=ps+qr$ અને અચળ પદોને સરખાવતાં $c=qs$.

આ આપણને બતાવે છે કે b એ ps અને qr નો સરવાળો છે. તેમનો ગુણાકાર $(ps)(qr)=(pr)(qs)=ac$.

તેથી ax^2+bx+cના અવયવો પાડવા માટે આપણે bને જેમનો ગુણાકાર ac થાય એવી બે સંખ્યાના સરવાળા તરીકે લખવું પડે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

6. $x+2$ એ x^3+3x^2+5x+6 અને $2x+4$નો અવયવ છે કે નહીં, તે ચકાસો.

$x+2$નું શૂન્ય -2 છે.

ધારો કે, $p(x)=x^3+3x^2+5x+6$ અને $s(x)=2x+4$

$$p(-2)=(-2)^3+3(-2)^2+5(-2)+6$$
$$=-8+12-10+6=0$$

તેથી અવયવ પ્રમેય પરથી **$x+2$ એ x^3+3x^2+5x+6 નો અવયવ છે.**

વળી, $s(-2)=2(-2)+4=0$

તેથી **$x+2$ એ $2x+4$નો અવયવ છે.**

7. જો $x-1$ એ $4x^3+3x^2-4x+k$નો અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

$x-1$ એ $p(x)=4x^3+3x^2-4x+k$ નો અવયવ છે.

$\therefore p(1)=0$

હવે, $p(1)=4(1)^3+3(1)^2-4(1)+k$

$\therefore 4+3-4+k=0$

$\therefore \boldsymbol{k=-3}$

8. $6x^2+17x+5$ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને અને અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

રીત 1 : (મધ્યમ પદને વિભાજિત કરવાની રીત) :

આપણે એવી બે સંખ્યા p અને q શોધીએ કે જેથી $p+q=17$ અને $pq=6\times 5=30$ થાય.

30ના અવયવોની બધી જોડમાંથી 2 અને 15ની જોડ આપણને $p+q=17$ આપે છે.

તેથી $6x^2+17x+5=6x^2+(2+15)x+5$
$=6x^2+2x+15x+5$
$=2x(3x+1)+5(3x+1)$
$=\boldsymbol{(3x+1)(2x+5)}$

રીત 2 :

$6x^2+17x+5=6\left(x^2+\frac{17}{6}x+\frac{5}{6}\right)=6p(x)$ કહો.

જો a અને b, $p(x)$નાં શૂન્ય હોય,

તો $6x^2+17x+5=6(x-a)(x-b)$. તેથી $ab=\frac{5}{6}$.

ચાલો a અને bની કેટલીક સંભવિત કિંમતો જોઈએ.

$\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{5}{3}$, $\pm\frac{5}{2}$, ± 1

હવે, $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}\neq 0$

પરંતુ, $p\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\frac{17}{6}\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{5}{6}=0$

તેથી $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

તે જ પ્રમાણે પ્રયત્નો દ્વારા $\left(x+\frac{5}{2}\right)$ એ $p(x)$નો અવયવ છે તે નક્કી થઈ શકે.

$$6x^2+17x+5=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$
$$=6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$
$$=\boldsymbol{(3x+1)(2x+5)}$$

9. અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને $y^2 - 5y + 6$ના અવયવ પાડો.

ધારો કે, $p(y) = y^2 - 5y + 6$. હવે જો $p(y) = (y - a)(y - b)$, તો સ્પષ્ટ છે કે ab અચળ પદ છે. તેથી $ab = 6$. તેથી $p(y)$ના અવયવો શોધવા માટે 6ના અવયવોનો વિચાર કરીએ.

6ના અવયવો : ± 1, ± 2, ± 3 અને ± 6

હવે, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

તેથી $y - 2$ એ $p(y)$નો અવયવ છે.

આ ઉપરાંત, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

તેથી $y - 3$ એ પણ $y^2 - 5y + 6$નો અવયવ છે.

તેથી $y^2 - 5y + 6 =$ **$(y - 2)(y - 3)$**

10. અવયવ પાડો : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

ધારો કે, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

હવે, આપણે -120ના બધા જ અવયવો વિચારતા તેમાંના કેટલાક ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 6, ± 8, ± 10, ± 12, ± 15, ± 20, ± 24, ± 30, ± 60 છે.

આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણી શકીએ કે $p(1) = 0$, તેથી $x - 1$ એ $p(x)$નો અવયવ છે.

હવે, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ સામાન્ય લેતાં]

આપણે $p(x)$ ને $x - 1$ વડે ભાગીને પણ ઉપરોક્ત જવાબ મેળવી શકીએ.

હવે, $x^2 - 22x + 120$ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને અથવા અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકીએ.

મધ્યમ પદને વિભાજિત કરતાં,

$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$

$= x(x - 12) - 10(x - 12)$

$= (x - 12)(x - 10)$

તેથી $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$=$ **$(x - 1)(x - 10)(x - 12)$**

સ્વાધ્યાય 2.3 | પાના નં. 32 – 33

1. નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે, તે નક્કી કરો :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

(i) અહીં, $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ અને $x + 1$નું શૂન્ય (-1) છે.

હવે, $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1$

$= 0$

માટે, અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $(x + 1)$ એ $x^3 + x^2 + x + 1$નો **અવયવ છે.**

(ii) અહીં, $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ અને $x + 1$નું શૂન્ય (-1) છે.

હવે, $p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$= 1$

$\neq 0$

માટે, અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $(x + 1)$ એ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$નો **અવયવ નથી.**

(iii) અહીં, $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ અને $x + 1$નું શૂન્ય (-1) છે.

હવે,

$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$

$= 1$

$\neq 0$

માટે, અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $(x + 1)$ એ $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$નો **અવયવ નથી.**

(iv) અહીં, $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ અને $x + 1$નું શૂન્ય (-1) છે.

હવે,

$p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$

$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\neq 0$

માટે, અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $(x + 1)$ એ $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ નો **અવયવ નથી.**

2. બહુપદી $g(x)$ એ આપેલ બહુપદી $p(x)$નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

(i) અહીં, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ અને $g(x) = x + 1$ નું શૂન્ય (-1) છે.

હવે, $p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$= -2 + 1 + 2 - 1$

$= 0$

આથી અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $g(x) = x + 1$ એ $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$નો **અવયવ છે.**

(ii) અહીં, $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ અને

$g(x) = x + 2$ નું શૂન્ય (-2) છે.

હવે, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= -8 + 12 - 6 + 1$

$= -1$

$\neq 0$

આથી અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $g(x) = x + 2$ એ $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$નો **અવયવ નથી.**

(iii) અહીં, $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ અને

$g(x) = x - 3$ નું શૂન્ય 3 છે.

હવે, $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + (3) + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6$

$= 0$

આથી અવયવ પ્રમેય પ્રમાણે $g(x) = x - 3$ એ $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$નો **અવયવ છે.**

3. નીચેના દરેકમાં જો $x - 1$ એ $p(x)$નો એક અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

(i) $x - 1$ એ $p(x) = x^2 + x + k$નો અવયવ છે.

$\therefore p(1) = 0$

$\therefore (1)^2 + (1) + k = 0$

$\therefore 1 + 1 + k = 0$

$\therefore 2 + k = 0$

$\therefore$ **$k = -2$**

(ii) $x - 1$ એ $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$ નો અવયવ છે.

$\therefore p(1) = 0$

$\therefore 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$\therefore 2 + k + \sqrt{2} = 0$

$\therefore$ **$k = -(2 + \sqrt{2})$**

(iii) $x - 1$ એ $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$નો અવયવ છે.

$\therefore p(1) = 0$

$\therefore k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

$\therefore k - \sqrt{2} + 1 = 0$

$\therefore$ **$k = \sqrt{2} - 1$**

(iv) $x - 1$ એ $p(x) = kx^2 - 3x + k$નો અવયવ છે.

$\therefore p(1) = 0$

$\therefore k(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$\therefore k - 3 + k = 0$

$\therefore 2k = 3$

$\therefore$ **$k = \frac{3}{2}$**

4. અવયવ પાડો :

(i) $12x^2 - 7x + 1$ **(ii) $2x^2 + 7x + 3$**

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ **(iv) $3x^2 - x - 4$**

(i) $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$=$ **$(3x - 1)(4x - 1)$**

(ii) $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$=$ **$(x + 3)(2x + 1)$**

(iii) $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$=$ **$(2x + 3)(3x - 2)$**

(iv) $3x^2 - x - 4 = 3x^2 + 3x - 4x - 4$

$= 3x(x + 1) - 4(x + 1)$

$=$ **$(x + 1)(3x - 4)$**

5. અવયવ પાડો :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

(i) ધારો કે, $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2ના બધા જ અવયવો ± 1 અને ± 2 છે. પ્રયત્નો દ્વારા આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

$p(1) = 0$

$\therefore x - 1$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

$x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= x^3 - x^2 - x^2 + x - 2x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1)$

$= (x-1)(x^2-x-2)$

$= (x-1)(x^2-2x+x-2)$

$= (x-1)\{x(x-2)+1(x-2)\}$

$= \mathbf{(x-1)(x-2)(x+1)}$

(ii) ધારો કે, $p(x) = x^3-3x^2-9x-5$

-5ના બધા જ અવયવો ± 1 અને ± 5 છે. પ્રયત્નો દ્વારા આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $p(-1) = 0$

$\therefore x+1$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

x^3-3x^2-9x-5

$= x^3+x^2-4x^2-4x-5x-5$

$= x^2(x+1)-4x(x+1)-5(x+1)$

$= (x+1)(x^2-4x-5)$

$= (x+1)(x^2+x-5x-5)$

$= (x+1)\{x(x+1)-5(x+1)\}$

$= \mathbf{(x+1)(x+1)(x-5)}$

(iii) ધારો કે, $p(x) = x^3+13x^2+32x+20$

20ના બધા જ અવયવો $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$ છે. પ્રયત્નો દ્વારા આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

$p(-1) = 0$

$\therefore x+1$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

$x^3+13x^2+32x+20$

$= x^3+x^2+12x^2+12x+20x+20$

$= x^2(x+1)+12x(x+1)+20(x+1)$

$= (x+1)(x^2+12x+20)$

$= (x+1)(x^2+2x+10x+20)$

$= (x+1)\{x(x+2)+10(x+2)\}$

$= \mathbf{(x+1)(x+2)(x+10)}$

(iv) ધારો કે, $p(y) = 2y^3+y^2-2y-1$

-1ના બધા જ અવયવો ± 1 છે. પ્રયત્નો દ્વારા આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

$p(-1) = 0$

$\therefore y+1$ એ $p(y)$નો એક અવયવ છે.

$2y^3+y^2-2y-1$

$= 2y^3+2y^2-y^2-y-y-1$

$= 2y^2(y+1)-y(y+1)-1(y+1)$

$= (y+1)(2y^2-y-1)$

$= (y+1)(2y^2-2y+y-1)$

$= (y+1)\{2y(y-1)+1(y-1)\}$

$= \mathbf{(y+1)(y-1)(2y+1)}$

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. x^3+6x^2-2x-5નો એક અવયવ $x-1$ છે કે કેમ તે તપાસો.

2. $x^3+9x^2-4x-12$નો એક અવયવ $x+1$ છે કે કેમ તે તપાસો.

3. x^3+2x^2-5x-6નો એક અવયવ $x+3$ છે કે કેમ તે તપાસો.

4. x^3-3x^2-6x+8નો એક અવયવ $x-4$ છે કે કેમ તે તપાસો.

5. જો $x-1$ એ $4x^3+3x^2-4x+k$નો એક અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

6. જો $2x-1$ એ $4x^3-16x^2+10x+k$નો એક અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

7. $4t^3+4t^2-t-1$ નો એક અવયવ $2t+1$ છે કે કેમ તે તપાસો.

8. જો $x-4$ એ $x^3-5x^2-px+24$નો એક અવયવ હોય, તો pની કિંમત શોધો.

9. જો $x-3$ એ $k^2x^3-kx^2+3kx-k$નો એક અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો. $(k \neq 0)$

10. ભાગાકાર કર્યા વિના દર્શાવો કે, $3x^4+4x^3-12x^2-x-30$ એ x^2+x-6નો ગુણિત છે.

11. અવયવ પાડો :

(1) $10x^2+7x+1$ (2) $5x^2-18x-8$

(3) $6x^2+13x+6$ (4) $12x^2+x-6$

(5) $2x^2-9x-35$

12. અવયવ પાડો :

(1) $x^3+8x^2+19x+12$

(2) $x^3-4x^2-7x+10$

(3) $2x^3+7x^2+2x-3$

(4) $3x^3+14x^2-7x-10$

(5) $6x^3+13x^2+9x+2$

જવાબો : **1.** અવયવ છે. **2.** અવયવ છે. **3.** અવયવ છે.

4. અવયવ છે. **5.** $k = -3$ **6.** $k = -\frac{3}{2}$

7. અવયવ છે. **8.** $p = 2$ **9.** $k = \frac{1}{27}$

11. (1) $(2x + 1)(5x + 1)$

(2) $(5x + 2)(x - 4)$

(3) $(3x + 2)(2x + 3)$

(4) $(4x + 3)(3x - 2)$

(5) $(2x + 5)(x - 7)$

12. (1) $(x + 1)(x + 3)(x + 4)$

(2) $(x - 1)(x + 2)(x - 5)$

(3) $(x + 1)(x + 3)(2x - 1)$

(4) $(x - 1)(x + 5)(3x + 2)$

(5) $(x + 1)(2x + 1)(3x + 2)$

યાદ રાખો

* **બૈજિક નિત્યસમો (Algebraic identities) :**

(I) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(II) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(III) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

(IV) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(V) $(a + b + c)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(VI) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(VII) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

* ઉપરનાં નિત્યસમો વિસ્તરણ સ્વરૂપમાં છે. તેમને ઊલટા ક્રમમાં લખતાં પ્રમાણિત અવયવોનું સ્વરૂપ મળે છે.

(VIII) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

અહીં જો $a + b + c = 0$ હોય, તો

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

* **બે વધારે નિત્યસમો :**

(1) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

નોંધ : ઉપરના બધા જ નિત્યસમોમાં નિત્યસમ IV સિવાયના નિત્યસમોમાં a, b, cના સ્થાને અનુક્રમે x, y, z વાપરી શકાય.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

11. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો :

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

(i) નિત્યસમ Iનો ઉપયોગ કરતાં,

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ મૂકતાં,

$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$

$= x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= \mathbf{x^2 + 6x + 9}$

(ii) નિત્યસમ IVનો ઉપયોગ કરતાં,

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$= \mathbf{x^2 + 2x - 15}$

12. સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય 105×106ની કિંમત મેળવો.

$105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$,

(નિત્યસમ IVનો ઉપયોગ કરતાં)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= \mathbf{11130}$

13. અવયવ પાડો :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(i) અહીં, $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$,

$70ab = 2(7a)(5b)$

આપેલ પદાવલિને $x^2 + 2xy + y^2$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 7a$ અને $y = 5b$.

નિત્યસમ Iનો ઉપયોગ કરતાં,

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2$

$= \mathbf{(7a + 5b)(7a + 5b)}$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

$= \mathbf{\left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)}$

14. $(3a + 4b + 5c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

આપેલ પદાવલિ $(x + y + z)^2$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 3a$, $y = 4b$ અને $z = 5c$.

નિત્યસમ Vનો ઉપયોગ કરતાં,

$(3a + 4b + 5c)^2$

$= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b)$

$+ 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$

$= \mathbf{9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac}$

15. $(4a - 2b - 3c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

નિત્યસમ Vનો ઉપયોગ કરતાં,

$(4a - 2b - 3c)^2$

$= [4a + (-2b) + (-3c)]^2$

$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b)$

$+ 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$

$= \mathbf{16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac}$

16. અવયવ પાડો : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y)$

$+ 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (નિત્યસમ Vનો ઉપયોગ કરતાં)

$= (2x - y + z)^2$

$= \mathbf{(2x - y + z)(2x - y + z)}$

17. નીચે આપેલા ઘનને વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખો :

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

(i) આપેલ પદાવલિને $(x + y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 3a,\ y = 4b.$

તેથી નિત્યસમ VIનો ઉપયોગ કરતાં,

$(3a + 4b)^3$

$= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$

$= \mathbf{27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2}$

(ii) આપેલ પદાવલિને $(x - y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 5p,\ y = 3q.$

તેથી નિત્યસમ VIIનો ઉપયોગ કરતાં,

$(5p - 3q)^3$

$= (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$

$= \mathbf{125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2}$

18. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો :

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

(i) $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$

(નિત્યસમ VIIનો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= \mathbf{1124864}$

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$

(નિત્યસમ VIIનો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= \mathbf{997002999}$

19. અવયવ પાડો : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

આ પદાવલિને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય :

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ (નિત્યસમ VIનો ઉપયોગ કરતાં)

$= \mathbf{(2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)}$

20. અવયવ પાડો : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)$

$[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= \mathbf{(2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)}$

સ્વાધ્યાય 2.4 | પાના નં. 37 – 38

1. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો :

(i) $(x + 4)(x + 10)$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

(i) $(x + 4)(x + 10)$

$= (x)^2 + (4 + 10)x + (4)(10)$

$= \mathbf{x^2 + 14x + 40}$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

$= (x)^2 + (8 - 10)x + (8)(-10)$

$= \mathbf{x^2 - 2x - 80}$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

$= (3x)^2 + (4 - 5)(3x) + (4)(-5)$

$= \mathbf{9x^2 - 3x - 20}$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \mathbf{y^4 - \frac{9}{4}}$

(v) $(3-2x)(3+2x)$

$= (3)^2-(2x)^2$

$= \mathbf{9-4x^2}$

2. સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકારની કિંમતો મેળવો :

(i) 103×107 (ii) 95×96

(iii) 104×96

(i) 103×107

$= (100+3)(100+7)$

$= (100)^2+(3+7)(100)+(3)(7)$

$= 10000+1000+21$

$= \mathbf{11,021}$

(ii) 95×96

$= (90+5)(90+6)$

$= (90)^2+(5+6)(90)+(5)(6)$

$= 8100+990+30 = \mathbf{9120}$

અથવા

95×96

$= (100-5)(100-4)$

$= (100)^2+(-5-4)(100)+(-5)(-4)$

$= 10000-900+20$

$= 10020-900 = \mathbf{9120}$

(iii) 104×96

$= (100+4)(100-4)$

$= (100)^2-(4)^2$

$= 10000-16 = \mathbf{9984}$

3. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી અવયવ પાડો :

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$

(iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

(i) $9x^2+6xy+y^2$

$= (3x)^2+2(3x)(y)+(y)^2$

$= (3x+y)^2 = \mathbf{(3x+y)(3x+y)}$

(ii) $4y^2-4y+1$

$= (2y)^2-2(2y)(1)+(1)^2$

$= (2y-1)^2 = \mathbf{(2y-1)(2y-1)}$

(iii) $x^2-\frac{y^2}{100} = (x)^2-\left(\frac{y}{10}\right)^2$

$= \mathbf{\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)}$

4. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને વિસ્તરણ કરો :

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$

(iii) $(-2x+3y+2z)^2$ (iv) $(3a-7b-c)^2$

(v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

(i) $(x+2y+4z)^2$

$= (x)^2+(2y)^2+(4z)^2+2(x)(2y)$

$+2(2y)(4z)+2(4z)(x)$

$= \mathbf{x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8zx}$

(ii) $(2x-y+z)^2$

$= [2x+(-y)+z]^2$

$= (2x)^2+(-y)^2+(z)^2+2(2x)(-y)$

$+2(-y)(z)+2(z)(2x)$

$= \mathbf{4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4zx}$

(iii) $(-2x+3y+2z)^2$

$= [(-2x)+3y+2z]^2$

$= (-2x)^2+(3y)^2+(2z)^2+2(-2x)(3y)$

$+2(3y)(2z)+2(2z)(-2x)$

$= \mathbf{4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8zx}$

(iv) $(3a-7b-c)^2$

$= [3a+(-7b)+(-c)]^2$

$= (3a)^2+(-7b)^2+(-c)^2+2(3a)(-7b)$

$+2(-7b)(-c)+2(-c)(3a)$

$= \mathbf{9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ca}$

(v) $(-2x+5y-3z)^2$

$= [(-2x)+5y+(-3z)]^2$

$= (-2x)^2+(5y)^2+(-3z)^2+2(-2x)(5y)$

$+2(5y)(-3z)+2(-3z)(-2x)$

$= \mathbf{4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12zx}$

(vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

$= \left[\frac{1}{4}a+\left(-\frac{1}{2}b\right)+1\right]^2$

$= \left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(-\frac{1}{2}b\right)^2+(1)^2+2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)$

$+2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1)+2(1)\left(\frac{1}{4}a\right)$

$= \mathbf{\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}b^2+1-\frac{1}{4}ab-b+\frac{1}{2}a}$

5. અવયવ પાડો :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y)$
$\quad + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$

$= [2x + 3y + (-4z)]^2$

$= (2x + 3y - 4z)^2$

$= \mathbf{(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)}$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

$= (-\sqrt{2}\,x)^2 + (y)^2 + (2\sqrt{2}\,z)^2 + 2(-\sqrt{2}\,x)(y)$
$\quad + 2(y)(2\sqrt{2}\,z) + 2(2\sqrt{2}\,z)(-\sqrt{2}\,x)$

$= [(-\sqrt{2}\,x) + y + 2\sqrt{2}\,z]^2$

$= (-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z)^2$

$= \mathbf{(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z)(-\sqrt{2}\,x + y + 2\sqrt{2}\,z)}$

6. નીચેના ઘનનું વિસ્તરણ કરો :

(i) $(2x + 1)^3$ **(ii) $(2a - 3b)^3$**

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ **(iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$**

(i) $(2x + 1)^3$

$= (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$

$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$

$= \mathbf{8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x}$

અથવા

$(2x + 1)^3$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$

$= \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$

(ii) $(2a - 3b)^3$

$= (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b)$

$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b)$

$= \mathbf{8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2}$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

$= \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$

$= \frac{27}{8}x^3 + 1 + \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$

$= \mathbf{\frac{27}{8}x^3 + 1 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x}$

(iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

$= (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)\left(x - \frac{2}{3}y\right)$

$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x - \frac{2}{3}y\right)$

$= \mathbf{x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2}$

7. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત મેળવો :

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

(i) $(99)^3$

$= (100 - 1)^3$

$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1)$

$= 1000000 - 1 - 300(99)$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= \mathbf{9,70,299}$

(ii) $(102)^3$

$= (100 + 2)^3$

$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100 + 2)$

$= 1000000 + 8 + 600(102)$

$= 1000000 + 8 + 61200$

$= \mathbf{10,61,208}$

(iii) $(998)^3$

$= (1000 - 2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000(1000 - 2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000000 + 12000$

$= 994000000 + 12000 - 8$

$= \mathbf{99,40,11,992}$

8. નીચેના પૈકી પ્રત્યેકના અવયવ પાડો :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(4a^2)(b) + 3(2a)(b^2)$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

$= (2a + b)^3$

$= \mathbf{(2a + b)(2a + b)(2a + b)}$

અથવા

$8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 6ab\,(2a + b)$

$= (2a)^3 + (b)^3 + 3\,(2a)\,(b)\,(2a + b)$

$= (2a + b)^3$

$= \mathbf{(2a + b)\,(2a + b)\,(2a + b)}$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 - (b)^3 - 6ab\,(2a - b)$

$= (2a)^3 - (b)^3 - 3\,(2a)\,(b)\,(2a - b)$

$= (2a - b)^3$

$= \mathbf{(2a - b)\,(2a - b)\,(2a - b)}$

અથવા

$8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

$= (2a)^3 + (-b)^3 + 3\,(4a^2)\,(-b) + 3\,(2a)\,(b^2)$

$= (2a)^3 + (-b)^3 + 3\,(2a)^2\,(-b) + 3\,(2a)\,(-b)^2$

$= (2a - b)^3$

$= \mathbf{(2a - b)\,(2a - b)\,(2a - b)}$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

$= (3)^3 + (-5a)^3 + 3\,(9)\,(-5a) + 3\,(3)\,(25a^2)$

$= (3)^3 + (-5a)^3 + 3\,(3)^2\,(-5a) + 3\,(3)\,(-5a)^2$

$= (3 - 5a)^3$

$= \mathbf{(3 - 5a)\,(3 - 5a)\,(3 - 5a)}$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

$= (4a)^3 + (-3b)^3 + 3\,(16a^2)\,(-3b) + 3\,(4a)\,(9b^2)$

$= (4a)^3 + (-3b)^3 + 3\,(4a)^2\,(-3b) + 3\,(4a)\,(-3b)^2$

$= (4a - 3b)^3$

$= \mathbf{(4a - 3b)\,(4a - 3b)\,(4a - 3b)}$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

$= (3p)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3\,(9p^2)\left(-\frac{1}{6}\right) + 3\,(3p)\left(\frac{1}{36}\right)$

$= (3p)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3\,(3p)^2\left(-\frac{1}{6}\right) + 3\,(3p)\left(-\frac{1}{6}\right)^2$

$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$

$= \mathbf{\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)}$

9. ચકાસો :

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$

(i) જ.બા. $= (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$

$= x\,(x^2 - xy + y^2) + y\,(x^2 - xy + y^2)$

$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3$

$=$ ડા.બા.

(ii) ડા.બા. $= x^3 - y^3$

$= (x - y)^3 + 3xy\,(x - y)$

$= (x - y)\,\{(x - y)^2 + 3xy\}$

$= (x - y)\,(x^2 - 2xy + y^2 + 3xy)$

$= (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$

$=$ જ.બા.

10. નીચેના પૈકી દરેકના અવયવ પાડો :

(i) $27y^3 + 125z^3$ **(ii) $64m^3 - 343n^3$**

[સૂચન : પ્રશ્ન 9 જુઓ.]

(i) $27y^3 + 125z^3$

દાખલા નં. 9માં આપણે જોયું કે $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$ નિત્યસમ છે.

$a = 3y$ અને $b = 5z$ લેતાં,

$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5z)\,[(3y)^2 - (3y)\,(5z) + (5z)^2]$

$\therefore 27y^3 + 125z^3 = \mathbf{(3y + 5z)\,(9y^2 - 15yz + 25z^2)}$

અથવા

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$ નિત્યસમ છે.

$a = 3y$ અને $b = 5z$ લેતાં,

$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5z)^3 - 3\,(3y)\,(5z)\,(3y + 5z)$

$\therefore 27y^3 + 125z^3 = (3y + 5z)\,[(3y + 5z)^2 - 45yz]$

$= (3y + 5z)\,(9y^2 + 30yz + 25z^2 - 45yz)$

$= \mathbf{(3y + 5z)\,(9y^2 - 15yz + 25z^2)}$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

દાખલા નં. 9માં આપણે જોયું કે $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ નિત્યસમ છે.

$a = 4m$ અને $b = 7n$ લેતાં,

$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$

$\therefore 64m^3 - 343n^3 =$ **$(4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$**

અથવા

$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ નિત્યસમ છે.

$a = 4m$ અને $b = 7n$ લેતાં,

$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n)^3 + 3(4m)(7n)(4m - 7n)$

$\therefore 64m^3 - 343n^3 = (4m - 7n)[(4m - 7n)^2 + 84mn]$

$= (4m - 7n)(16m^2 - 56mn + 49n^2 + 84mn)$

$=$ **$(4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$**

11. અવયવ પાડો : **$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$**

આપણે જાણીએ છીએ કે $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ નિત્યસમ છે.

$a = 3x$, $b = y$ અને $c = z$ લેતાં,

$(3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)(z) = (3x + y + z)[(3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - (y)(z) - (z)(3x)]$

$\therefore 27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz =$ **$(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$**

12. ચકાસો : **$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$**

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ નિત્યસમ છે.

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= (x + y + z) \cdot \frac{1}{2}[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

અથવા

જ.બા. $= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + zx^2 + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - z^2x$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$=$ ડા.બા.

13. જો **$x + y + z = 0$**, તો સાબિત કરો કે **$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.**

આપણે જાણીએ છીએ કે $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ નિત્યસમ છે.

જો $x + y + z = 0$ હોય, તો $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (0)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

14. ઘનનું મૂલ્ય મેળવ્યા સિવાય નીચેના દરેકની કિંમતો મેળવો :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

(i) $a = -12$, $b = 7$ અને $c = 5$ લેતાં,

$a + b + c = (-12) + 7 + 5 = 0$ મળે.

હવે, જો $a + b + c = 0$ હોય, તો

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$\therefore (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$

$= (-36)(35)$

$= \mathbf{-1260}$

(ii) $a = 28$, $b = -15$ અને $c = -13$ લેતાં,

$a + b + c = 28 + (-15) + (-13) = 0$ મળે.

હવે, જો $a + b + c = 0$ હોય, તો

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$\therefore (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$= 3(28)(-15)(-13)$

$= (84)(195)$

$= \mathbf{16,380}$

15. નીચે લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ દર્શાવેલ છે. તેમની સંભવિત લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો :

(i) ક્ષેત્રફળ : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) ક્ષેત્રફળ : $35y^2 + 13y - 12$

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ

આથી ક્ષેત્રફળની પદાવલિના બે અવયવો મેળવવાથી આપણને લંબચોરસની સંભવિત લંબાઈ તથા પહોળાઈ મળે. અહીં, આપણે ક્ષેત્રફળની બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો મેળવીશું.

$25a^2 - 35a + 12 = 25a^2 - 20a - 15a + 12$

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

આમ, આપેલ ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસની સંભવિત લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે **$(5a - 3)$ અને $(5a - 4)$** છે.

નોંધ : સામાન્ય રીતે લંબચોરસમાં લંબાઈ > પહોળાઈ લેવામાં આવે છે.

(ii) આપણે જાણીએ છીએ કે

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ

આથી ક્ષેત્રફળની પદાવલિના બે અવયવો મેળવવાથી આપણને લંબચોરસની સંભવિત લંબાઈ તથા પહોળાઈ મળે. અહીં, આપણે ક્ષેત્રફળની બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો મેળવીશું.

$35y^2 + 13y - 12 = 35y^2 + 28y - 15y - 12$

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$

$= (5y + 4)(7y - 3)$

આમ, આપેલ ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસની સંભવિત લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે **$(7y - 3)$ અને $(5y + 4)$** છે.

16. નીચે લંબઘનનાં ઘનફળ દર્શાવેલ છે. તેમનાં શક્ય પરિમાણ શોધો :

(i) ઘનફળ : $3x^2 - 12x$

(ii) ઘનફળ : $12ky^2 + 8ky - 20k$

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે

લંબઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

આથી ઘનફળની પદાવલિના ત્રણ અવયવો મેળવવાથી આપણને લંબઘનનાં શક્ય પરિમાણ મળે. અહીં, આપણે ઘનફળની બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો મેળવીશું.

$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$= 3 \times x \times (x - 4)$

આમ, લંબઘનનાં પરિમાણોની એક શક્ય કિંમતો **3, x અને $(x - 4)$** છે.

નોંધ : બીજા શક્ય પરિમાણો તરીકે આપણે 1, $3x$ અને $(x - 4)$ અથવા 1, x અને $(3x - 12)$ પણ લઈ શકીએ.

(ii) આપણે જાણીએ છીએ કે

લંબઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

આથી, ઘનફળની પદાવલિના ત્રણ અવયવો મેળવવાથી આપણને લંબઘનનાં શક્ય પરિમાણ મળે. અહીં, આપણે ઘનફળની બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો મેળવીશું.

$12ky^2 + 8ky - 20k$

$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$

$= 4k(3y^2 - 3y + 5y - 5)$

$= 4k[3y(y - 1) + 5(y - 1)]$

$= 4k(y - 1)(3y + 5)$

આમ, લંબઘનનાં પરિમાણોની એક શક્ય કિંમતો **$4k$, $(y - 1)$ અને $(3y + 5)$** છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. વિસ્તરણ કરો :

(1) $(2x + 3)(2x - 5)$ (2) $(3x - 2)(3x - 5)$

(3) $(2x^2 + 1)(2x^2 + 7)$ (4) $(5x + 2y)(5x + 4y)$

(5) $(7a + b)(7a - 3b)$

2. વિસ્તરણ કરો :

(1) $(2x + 7)(2x - 7)$ (2) $(5x + 3y)(5x - 3y)$

(3) $(4t + 5)(4t - 5)$ (4) $(5a - 4b)(5a + 4b)$

(5) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$

3. વિસ્તરણ કરો :

(1) $(a + 2b - 3c)^2$ (2) $(5x + y + 2z)^2$

(3) $(-x - 2y + 3)^2$ (4) $(x + 2y + 7z)^2$

(5) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{5}z\right)^2$

4. વિસ્તરણ કરો :

(1) $(2x + 3y)^3$ (2) $(4x - y)^3$

(3) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b\right)^3$ (4) $(3x + 7y)^3$

5. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાની કિંમત મેળવો :

(1) 82×85 (2) 51×57 (3) 66×74

(4) 97×103 (5) $(72)^2$ (6) $(98)^2$

(7) $(41)^3$ (8) $(103)^3$ (9) $(123)^2$

(10) $(79)^3$

6. અવયવ પાડો :

(1) $64x^2 - 81y^2$

(2) $9x^2 - 30xy + 25y^2$

(3) $\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$

(4) $49x^2 + 28xy + 4y^2$

(5) $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy - 6yz - 4zx$

(6) $x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 4xy + 20yz - 10zx$

(7) $121x^2 - 289$

(8) $\frac{9}{25}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{1}{4}y^2$

(9) $9x^2 + 25y^2 + 49z^2 - 30xy - 70yz + 42zx$

(10) $8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54ab^2$

(11) $27x^3 - 64y^3 - 108x^2y + 144xy^2$

(12) $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$

7. અવયવ પાડો :

(1) $8x^3 + 27y^3$ (2) $125x^3 - 64y^3$

(3) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{125}b^3$ (4) $64x^3 + 125y^3$

(5) $x^3 - 27$

(6) $a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 36abc$

(7) $x^3 + 8y^3 + 64z^3 - 24xyz$

(8) $8x^3 - 27y^3 + z^3 + 18xyz$

8. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાની કિંમત મેળવો :

(1) $15^3 - 9^3 - 6^3$ (2) $25^3 - 30^3 + 5^3$

(3) $18^3 + 12^3 - 30^3$ (4) $15^3 + 35^3 - 50^3$

9. ચકાસો કે 5 અને 3 એ બહુપદી $x^2 - 8x + 15$નાં શૂન્યો છે.

10. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને 8.2×7.8ની કિંમત શોધો.

11. વિસ્તરણ કરો : $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c\right)^2$

12. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને $12^3 + 15^3 - 27^3$ની કિંમત મેળવો.

13. અવયવ પાડો :

(1) $20x^2 + x - 1$

(2) $x^3 + 7x^2 - x - 7$

(3) $64x^3 - 125$

(4) $27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$

14. જે લંબઘનનું ઘનફળ $x^3 + 4x^2 - x - 4$ ઘન એકમ હોય, તેનાં શક્ય પરિમાણ શોધો.

15. નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી નીચેના દાખલા પૂર્ણ કરો :

(1) $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + (.....)^3 + 3(2a)(3b)(.....)$

$= 8a^3 + ... + 18ab(2a + 3b)$

$= 8a^3 + 27b^3 + ... + 54ab^2$

(2) $73 \times 67 = (70 + ...)(70 - .....)$

$= (70)^2 - (.....)^2$

$= ..... - 9$

$= 4891$

જવાબો : **1.** (1) $4x^2 - 4x - 15$

(2) $9x^2 - 21x + 10$

(3) $4x^4 + 16x^2 + 7$

(4) $25x^2 + 30xy + 8y^2$

(5) $49a^2 - 14ab - 3b^2$

2. (1) $4x^2 - 49$ (2) $25x^2 - 9y^2$

(3) $16t^2 - 25$ (4) $25a^2 - 16b^2$

(5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$

3. (1) $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 12bc - 6ca$

(2) $25x^2 + y^2 + 4z^2 + 10xy + 4yz + 20zx$

(3) $x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 12y - 6x$

(4) $x^2 + 4y^2 + 49z^2 + 4xy + 28yz + 14zx$

(5) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{25}z^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{2}{15}yz - \frac{1}{5}zx$

4. (1) $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

(2) $64x^3 - y^3 - 48x^2y + 12xy^2$

(3) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{64}b^3 - \frac{3}{16}a^2b + \frac{3}{32}ab^2$

(4) $27x^3 + 343y^3 + 189x^2y + 441xy^2$

5. (1) 6970 (2) 2907 (3) 4884

(4) 9991 (5) 5184 (6) 9604

(7) 68,921 (8) 10,92,727 (9) 15,129

(10) 4,93,039

6. (1) $(8x + 9y)(8x - 9y)$

(2) $(3x - 5y)(3x - 5y)$

(3) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{7}b\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{7}b\right)$

(4) $(7x + 2y)(7x + 2y)$

(5) $(2x + 3y - z)(2x + 3y - z)$

(6) $(-x + 2y + 5z)(-x + 2y + 5z)$

(7) $(11x + 17)(11x - 17)$

(8) $\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y\right)$

(9) $(3x - 5y + 7z)(3x - 5y + 7z)$

(10) $(2a + 3b)(2a + 3b)(2a + 3b)$

(11) $(3x - 4y)(3x - 4y)(3x - 4y)$

(12) $(2x - 5y)(2x - 5y)(2x - 5y)$

7. (1) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

(2) $(5x - 4y)(25x^2 + 20xy + 16y^2)$

(3) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{25}b^2\right)$

(4) $(4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$

(5) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

(6) $(a + 3b + 4c)(a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 3ab - 12bc - 4ca)$

(7) $(x + 2y + 4z)(x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy - 8yz - 4zx)$

(8) $(2x - 3y + z)(4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 3yz - 2zx)$

8. (1) 2430 (2) – 11,250

(3) – 19,440 (4) – 78,750

10. 63.96

11. $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}bc - \frac{1}{4}ca$

12. – 14,580

13. (1) $(4x + 1)(5x - 1)$

(2) $(x + 1)(x - 1)(x + 7)$

(3) $(4x - 5)(16x^2 + 20x + 25)$

(4) $(3a + 4b)^3$

14. $(x + 1)$ એકમ, $(x - 1)$ એકમ, $(x + 4)$ એકમ

15. (1) $3b$, $2a + 3b$, $27b^3$, $36a^2b$

(2) 3, 3, 3, 4900

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) બહુપદી $5x + 11$નું શૂન્ય ..... છે.

$\left(\frac{11}{5}, \frac{5}{11}, -\frac{11}{5}\right)$

(2) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ નું વિસ્તરણ ..... થાય.

$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}, x^3 - \frac{1}{x^3}, x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

(3) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 15$ માટે $p(3)$ = ...

(15, 36, 72)

(4) $8x^3 + 27$ને $2x + 3$ વડે ભાગતાં શેષ ..... મળે.

(0, 27, 8)

(5) $(4x + 7)(4x - 7)$ = ...

$(16x^2 - 49, 4x^2 - 49, x^2 - 49)$

(6) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)$ = ...

$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}, \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{2}, \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}\right)$

(7) 93×87 = ... *(8100, 8109, 8091)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ એક સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ની $x = 2$ આગળની કિંમત શોધો.

(2) ત્રિઘાત બહુપદી $p(x)$ને વધુમાં વધુ કેટલાં વાસ્તવિક શૂન્યો હોય ?

(3) બહુપદી $5x^2 - 7x + 3x^3 - x^4 + 11$ની ઘાત જણાવો.

(4) સીધો ગુણાકાર કર્યા વગર 47×53ની કિંમત શોધો.

(5) $p(x) = x^2 + 5x + 4$નાં શૂન્યો શોધો.

(6) બહુપદી $p(x) = x^2 + 3x + 2$ માટે $p(-2)$ શોધો.

(7) સીધો ગુણાકાર કર્યા વગર 2.5×3.5ની કિંમત શોધો.

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) જો બહુપદી $p(x)$ માટે $p(-3) = 0$ હોય, તો ..... એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

A. $x - 3$ B. $x + 3$ C. $x^2 - 3$ D. $x^2 + 3$

(2) $p(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$નું એક શૂન્ય ..... છે.

A. 1 B. 2 C. -2 D. -1

(3) $x^3 + 64$ને $x - 4$ વડે ભાગતાં શેષ ..... મળે.

A. 0 B. 64 C. 128 D. -128

(4) $4x^2 - 28x + 49 = (.....)^2$

A. $x + 7$ B. $x - 7$ C. $2x + 7$ D. $2x - 7$

(5) જો $x^2 - x - 56 = (x + m)(x + n)$ હોય, તો $m + n =$ ..... .

A. 15 B. -15 C. 18 D. -1

(6) $25x^2 + 70x + 49 = (.....)^2$

A. $5x + 7$ B. $5x - 7$ C. $7x + 5$ D. $7x - 5$

(7) બહુપદી $p(x) = 3x - 7$નું શૂન્ય ..... છે.

A. $\frac{3}{7}$ B. $-\frac{3}{7}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $-\frac{7}{3}$

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) બહુપદી $5x + 8$નું શૂન્ય $\frac{8}{5}$ છે.

(2) $x^2 - 49 = (x - 7)^2$

(3) $x^2 - 24x + 143 = (x - 13)(x - 11)$

(4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$

(5) બહુપદી $p(x)$ માટે જો $p(3) = 0$ હોય, તો $x - 3$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

(6) $x^2 - 16x + 64 = (x + 8)^2$

(7) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. $x^2 + 23x + 120$ના અવયવ	a. $(x - 15)(x + 8)$
2. $x^2 - 23x + 120$ના અવયવ	b. $(x + 15)(x + 8)$
3. $x^2 + 7x - 120$ના અવયવ	c. $(5x + 4)^2$
4. $x^2 - 7x - 120$ના અવયવ	d. $(4x - 5)^2$
5. $4x^2 - 28x + 49$ના અવયવ	e. $(x - 15)(x - 8)$
6. $25x^2 + 40x + 16$ના અવયવ	f. $(x + 15)(x - 8)$
7. $16x^2 - 40x + 25$ના અવયવ	g. $(2x - 7)^2$
8. $49x^2 - 256$ના અવયવ	h. $(5x - 4)^2$
	i. $(7x - 16)^2$
	j. $(7x + 16)(7x - 16)$

જવાબો

1. (1) $-\frac{11}{5}$ (2) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (3) 36 (4) 0 (5) $16x^2 - 49$ (6) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}$ (7) 8091

2. (1) 1 (2) ત્રણ (3) 4 (4) 2491 (5) -4 અને -1 (6) 0 (7) 8.75

3. (1) B. $x + 3$ (2) D. -1 (3) C. 128 (4) D. $2x - 7$ (5) D. -1 (6) A. $5x + 7$ (7) C. $\frac{7}{3}$

4. (1) ખોટું (2) ખોટું (3) ખરું (4) ખોટું (5) ખરું (6) ખોટું (7) ખોટું

5. 1 → b, 2 → e, 3 → f, 4 → a, 5 → g, 6 → c, 7 → d, 8 → j.

3 યામ ભૂમિતિ
(COORDINATE GEOMETRY)

યાદ રાખો

* પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ મળે અને આથી ઊલટું સંખ્યારેખા પરના પ્રત્યેક બિંદુને સંગત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા સંકળાય છે.

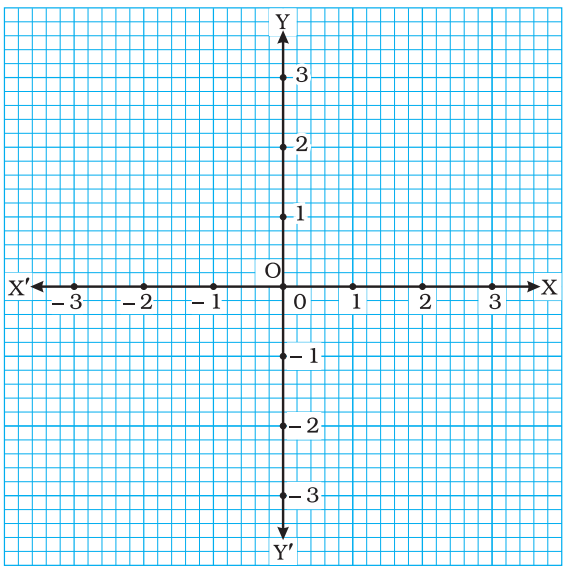
  અર્થાત્ સંખ્યારેખા અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમૂહ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે.

* યામ-સમતલ પર આવેલ કોઈ પણ બિંદુ(કે વસ્તુ)નું સ્થાન વર્ણવવા માટે આપણને બે પરસ્પર લંબરેખાઓની જરૂર પડે છે.

* યામ-સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવાની જે પદ્ધતિ ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે, તે મહાન ગણિતશાસ્ત્રી રેનૅ'દ'કાર્તેના નામ પરથી કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિ તરીકે ઓળખાય છે.

* **યામ-સમતલ :** સમતલમાં એક સમક્ષિતિજ (આડી) અને બીજી શિરોલંબ (ઊભી) એવી બે પરસ્પર લંબરેખાઓ દોરો. તેમના છેદબિંદુ Oને ઉગમબિંદુ (Origin) કહેવામાં આવે છે. સમક્ષિતિજ (Horizontal) રેખાને x-અક્ષ અને શિરોલંબ (Vertical) રેખાને y-અક્ષ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

  બંને અક્ષોને **યામાક્ષો** (Coordinate axes) કહેવાય છે. સમતલને યામ-સમતલ (Coordinate plane) અથવા કાર્તેઝિય સમતલ (Cartesian plane) અથવા xy-સમતલ કહેવાય છે.



* સંખ્યારેખા પરનાં બિંદુઓ અને વાસ્તવિક સંખ્યાઓના સમૂહ R વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. આથી x-અક્ષ તેમજ y-અક્ષ બંને પરના પ્રત્યેક બિંદુને સંગત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા મળે.

* આપણે જાણીએ છીએ કે સંખ્યારેખા પર 0ની જમણી બાજુએ ધન સંખ્યાઓ અને 0ની ડાબી બાજુએ ઋણ સંખ્યાઓનું નિરૂપણ થાય છે. તે જ રીતે, x-અક્ષ પર 0ની જમણી બાજુએ ધન સંખ્યાઓ અને 0ની ડાબી બાજુએ ઋણ સંખ્યાઓ આવેલ છે, એટલે કે ધન સંખ્યાઓ કિરણ OX પર અને ઋણ સંખ્યાઓ કિરણ OX′ પર આવેલ છે. y-અક્ષ માટે 0ની ઉપરની બાજુએ ધન સંખ્યાઓ અને 0ની નીચેની બાજુએ ઋણ સંખ્યાઓ આવેલ છે, એટલે કે ધન સંખ્યાઓ કિરણ OY પર અને ઋણ સંખ્યાઓ કિરણ OY′ પર આવેલ છે. કિરણો OX તથા OYને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ધન દિશા કહેવાય છે. તે જ રીતે કિરણો OX′ અને OY′ને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ઋણ દિશા કહેવાય છે.

* વાસ્તવિક સંખ્યાઓની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડ (a, b)ને સંગત બિંદુ L (a) અને M (b) અનુક્રમે x-અક્ષ તથા y-અક્ષ પર મળે. Lમાંથી x-અક્ષને લંબરેખા તથા Mમાંથી y-અક્ષને લંબરેખા Pમાં છેદે, તો Pને (a, b)ને સંગત સમતલનું બિંદુ કહે છે. તેને સંકેતમાં P (a, b) વડે દર્શાવાય છે. આથી ઊલટું સમતલના પ્રત્યેક બિંદુ P પરથી L (a) અને M (b) અક્ષો પર (Pથી અક્ષો ઉપર લંબ દોરીને) મેળવી શકાય.

* વાસ્તવિક સંખ્યાઓની પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડ (a, b)ને સંગત અનન્ય બિંદુ P (a, b) સમતલમાં છે તથા સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને સંગત અનન્ય ક્રમયુક્ત જોડ (a, b) એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ક્રમયુક્ત જોડ છે.

  aને Pનો ***x*-યામ** (x-coordinate) (ભુજ) તથા bને Pનો ***y*-યામ** (y-coordinate) (કોટિ) કહે છે.

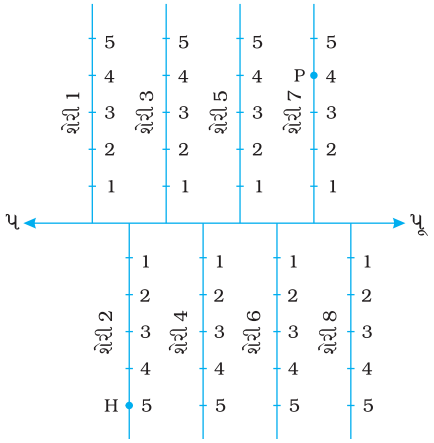
* કોઈ પણ બિંદુનો x-યામ એ તેનું y-અક્ષથી x-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે. જો અંતર x-અક્ષની ધન દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો x-યામ ધન હોય છે અને જો અંતર x-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો x-યામ ઋણ હોય છે.

* કોઈ પણ બિંદુનો y-યામ તેનું x-અક્ષથી y-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે. જો તે અંતર y-અક્ષની ધન દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો y-યામ ધન હોય છે તથા જો તે અંતર y-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો y-યામ ઋણ હોય છે.

* બિંદુના યામ લખતી વખતે પ્રથમ x-યામ અને તે પછી y-યામ લખવામાં આવે છે. યામને નાના કૌંસમાં લખવામાં આવે છે. દા. ત., (x, y)

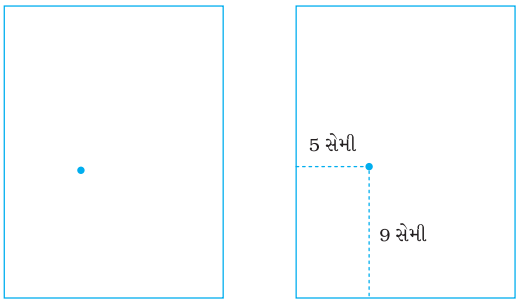
'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજ માટેની પ્રવૃત્તિઓ

I.



ઉપરોક્ત આકૃતિમાં રહેણાંક વિસ્તારમાં મુખ્ય રસ્તાઓ પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશા તરફ અને શેરીનું નામાભિધાન પશ્ચિમથી પૂર્વ તરફ કરેલું છે. વળી, દરેક શેરી પર ઘરના નંબર દર્શાવેલ છે. અહીં આ પરિસ્થિતિમાં આપણા મિત્રનું ઘર શોધવા તે અંગે એક સંદર્ભ જાણતા હોઈએ તે પર્યાપ્ત છે? તે માટે જો આપણે જાણીએ કે તે શેરી 2માં રહે છે, તો આપણે તેનું ઘર સરળતાથી શોધી લઈશું? ના. જે શેરીમાં મિત્રનું ઘર આવેલું છે, તે શેરીનો નંબર અને તેના ઘરનો નંબર બંને જાણતા હોઈએ તો આવી માહિતી પરથી જેટલી સરળતા રહે તેટલી સરળતાથી નહિ. જો આપણે બીજી શેરીમાં અને ઘર નંબર 5માં પહોંચવું હોય, તો સૌપ્રથમ બીજી શેરી ઓળખવી પડે અને ત્યાં પહોંચીને એ શેરીમાં 5 નંબરનું ઘર શોધી શકાય. આકૃતિમાં આ ચોક્કસ સ્થાન H દ્વારા દર્શાવવામાં આવ્યું છે. આ જ પ્રમાણે શેરી 7માં 4 નંબરનું ઘર P દ્વારા દર્શાવેલ છે.

II. ધારો કે, તમે એક ટપકું કાગળના ટુકડા પર કરો છો. [આકૃતિ (a)]. જો અમે તમને પૂછીએ કે કહો ટપકાનું સ્થાન પેપર પર ક્યાં છે? તમે કેવી રીતે જણાવશો? કદાચ તમે તમારી રીતે કેટલાક પ્રયત્ન કરશો કે 'ટપકું કાગળના ઉપરના અર્ધતલના ભાગમાં છે' અથવા 'તે ડાબી ધારની નજીક કાગળ પર છે' અથવા 'તે ડાબી બાજુના ઉપરના કાગળના ખૂણાની ઘણી નજીક છે.' શું આ મંતવ્યો પરથી ચોક્કસ સ્થાન નક્કી કરાય? ના! પણ તમે એવું કહો કે ''ટપકું કાગળની ડાબી ધારથી 5 સેમી દૂર છે.'' તો તે આપણને વિચારવામાં મદદ કરશે. પણ ટપકાનું સ્થાન ચોક્કસ નક્કી કરાતું નથી. એક વધુ માર્ગદર્શન આપવામાં આવે, તો તે તમારા માટે ટપકાનું સ્થાન તળિયેથી 9 સેમી ઉપર છે. હવે તે ટપકું ખરેખર ક્યાં છે તે જાણીએ.



(a) (b)

આપણે ટપકાનું સ્થાન બે રેખા એટલે કે ડાબી ધાર અને તળિયાની ધારથી કેટલું અંતર છે તે પરથી નિશ્ચિત કરીએ છીએ [આકૃતિ (b)]. **બીજા શબ્દોમાં, આપણા માટે બે સ્વતંત્ર માહિતી ટપકાનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે જરૂરી છે.**

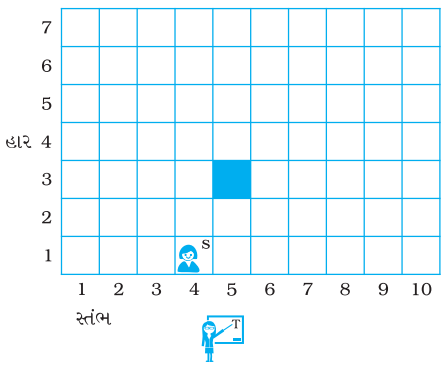
પ્રવૃત્તિ 1 (બેઠક-વ્યવસ્થા)

તમારા વર્ગખંડમાં બધી પાટલીઓની બેઠક-વ્યવસ્થાનું ચિત્ર તૈયાર કરીએ. દરેક પાટલીને ચોરસ તરીકે દર્શાવીએ. દરેક ચોરસમાં, જે પાટલી પર વિદ્યાર્થી બેસે છે તે દરેક પાટલી ઉપર વિદ્યાર્થીનું નામ લખીએ. દરેક વિદ્યાર્થીનું સ્થાન વર્ગખંડમાં બે સ્વતંત્ર માહિતીથી ચોક્કસ દર્શાવી શકાય.

(i) સ્તંભમાં તે ક્યાં બેસે છે?

(ii) હારમાં તે ક્યાં બેસે છે?

જો તમે પાંચમો સ્તંભ અને ત્રીજી હારમાં બેસો છો (આકૃતિમાં છાયાંકિત ચોરસ દર્શાવેલ છે.), તો તમારું સ્થાન (5, 3) લખી શકાય. પ્રથમ સ્તંભ નંબર અને પછી હાર નંબર છે. શું આ સ્થાન (3, 5)ને સમાન છે? તમારા વર્ગમાં બીજા વિદ્યાર્થીઓનાં નામો અને સ્થાનો દર્શાવો. ઉદાહરણ માટે જો સોનિયા ચોથા સ્તંભમાં અને પ્રથમ હારમાં બેઠી છે, તો તેનું સ્થાન S (4, 1) લખો. શિક્ષકનું ટેબલ તમારી બેઠક-વ્યવસ્થાનો ભાગ નથી. આપણે શિક્ષકને માત્ર કોઈ નિરીક્ષકના રૂપમાં લઈએ છીએ.



T શિક્ષકનું ટેબલ દર્શાવે છે.
S સોનિયાનું ટેબલ દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 3.1 | પાના નં. 42 – 43

1. બીજી કોઈ વ્યક્તિને તમારા અભ્યાસના ટેબલ પરના ટેબલ લૅમ્પનું સ્થાન કેવી રીતે વર્ણવશો?

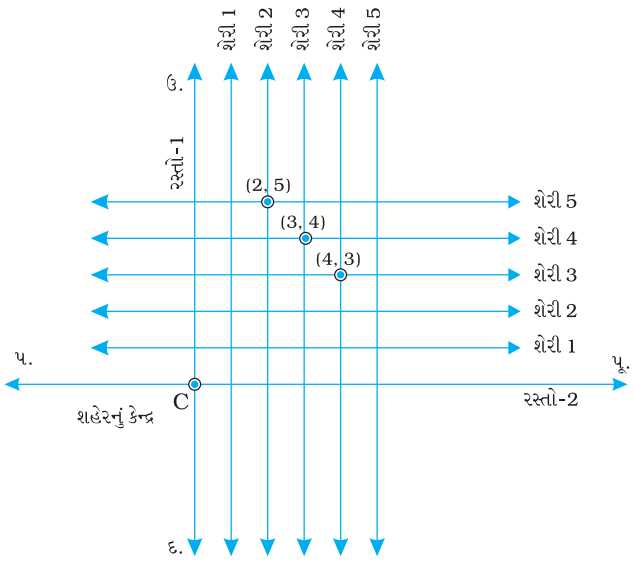
સૌપ્રથમ હું તે વ્યક્તિને સમજાવીશ કે મારું અભ્યાસ ટેબલ એ કાર્તેઝિય સમતલનું પ્રથમ ચરણ છે જેમાં મારી નજીક હોય તે ધાર એ x-અક્ષની ધન દિશા છે તથા મારા ડાબા હાથ તરફની ધાર એ y-અક્ષની ધન દિશા છે. હવે હું મારી નજીકની ધારથી ટેબલ લૅમ્પનું અંતર માપીશ. ધારો કે, તે y સેમી છે. ત્યારબાદ, હું મારા ડાબા હાથ તરફની ધારથી ટેબલ લૅમ્પનું અંતર માપીશ. ધારો કે, તે x સેમી છે. હવે હું ટેબલ લૅમ્પનું સ્થાન વર્ણવવા માટે જણાવીશ કે તે મારી નજીકની ધારથી y સેમી દૂર અને મારા ડાબા હાથ તરફની ધારથી x સેમી દૂર છે. આ રીતે બે સ્વતંત્ર માહિતીની મદદથી ટેબલ પર રહેલ ટેબલ લૅમ્પનું સ્થાન ચોકસાઈપૂર્વક વર્ણવી શકાય.

2. (શેરીનો નકશો) એક શહેરના બે મુખ્ય રસ્તાઓ શહેરના કેન્દ્ર આગળ એકબીજાને છેદે છે. આ બે રસ્તાઓ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાઓ અને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશાઓમાં છે. શહેરની બાકીની બધી શેરીઓ આ રસ્તાની સમાંતરે છે અને પરસ્પર 200 મીટર દૂર છે. દરેક દિશામાં 5 શેરીઓ છે. 1 સેમી = 200 મીટર માપ લઈ તમારી નોટબુકમાં શહેરનું આદર્શ ચિત્ર દોરો. રસ્તાઓ / શેરીઓને સીધી રેખાઓ દ્વારા દર્શાવો.

તમારા નમૂનામાં શહેરમાં ઘણી બધી છેદતી શેરીઓ છે. આ છેદતી શેરીઓ એક ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને બીજી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં જતી હોય તેવી બે શેરીઓની બનેલી છે. દરેક લંબ શેરી નીચેના અનુસંધાનમાં દર્શાવાય છે. જો બીજી શેરી ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને પાંચમી શેરી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ક્યાંક મળતી હોય, તો આપણે તેને છેદતી શેરી **(2, 5)** કહીશું. આ રૂઢિનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (4, 3) તરીકે થઈ શકે?

(ii) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (3, 4) તરીકે થઈ શકે?

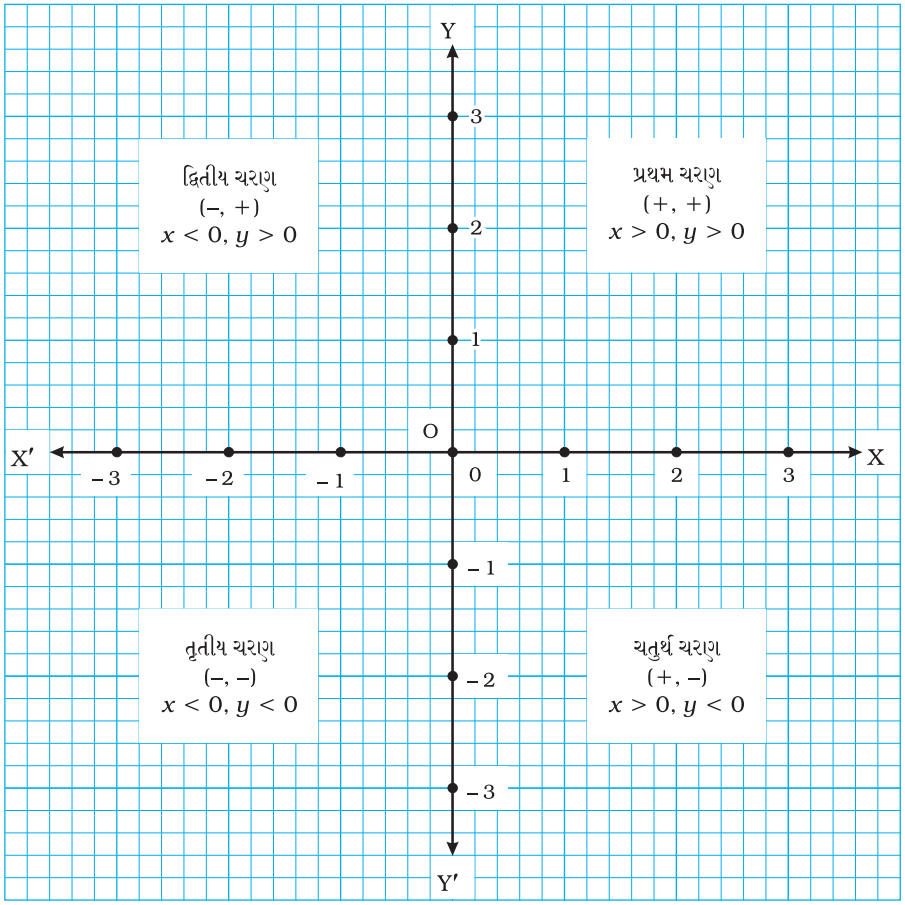


(i) છેદતી શેરીઓ પૈકી **એક અને માત્ર એકનું જ** (અનન્ય) નામાભિધાન (4, 3) તરીકે થઈ શકે, કારણ કે તે બિંદુ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં જતી ચોથી શેરી અને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં જતી ત્રીજી શેરીનું છેદબિંદુ છે. આપણે બે સ્વતંત્ર માહિતીનો ઉપયોગ કરતા હોવાથી શેરીઓના દરેક છેદબિંદુનું અનન્ય રીતે (x, y) નામાભિધાન કરી શકીએ.

(ii) છેદતી શેરીઓ પૈકી **એક અને માત્ર એકનું જ** (અનન્ય) નામાભિધાન (3, 4) તરીકે થઈ શકે, કારણ કે તે બિંદુ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં જતી ત્રીજી શેરી અને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં જતી ચોથી શેરીનું છેદબિંદુ છે.

યાદ રાખો

* **ચરણ (પાદ) (Quadrant) :** કાર્તેઝિય યામ પદ્ધતિમાં લંબ યામાક્ષો (x-અક્ષ અને y-અક્ષ) સમતલને ચાર વિભાગોમાં વહેંચે છે.



ચરણ	ભાગ	x-યામ	y-યામ
1. પ્રથમ ચરણ	$\angle XOY$નો અંદરનો ભાગ	+	+
2. દ્વિતીય ચરણ	$\angle YOX'$નો અંદરનો ભાગ	–	+
3. તૃતીય ચરણ	$\angle X'OY'$નો અંદરનો ભાગ	–	–
4. ચતુર્થ ચરણ	$\angle Y'OX$નો અંદરનો ભાગ	+	–

→ સમતલમાં ઉગમબિંદુ Oના યામ (0, 0) છે.

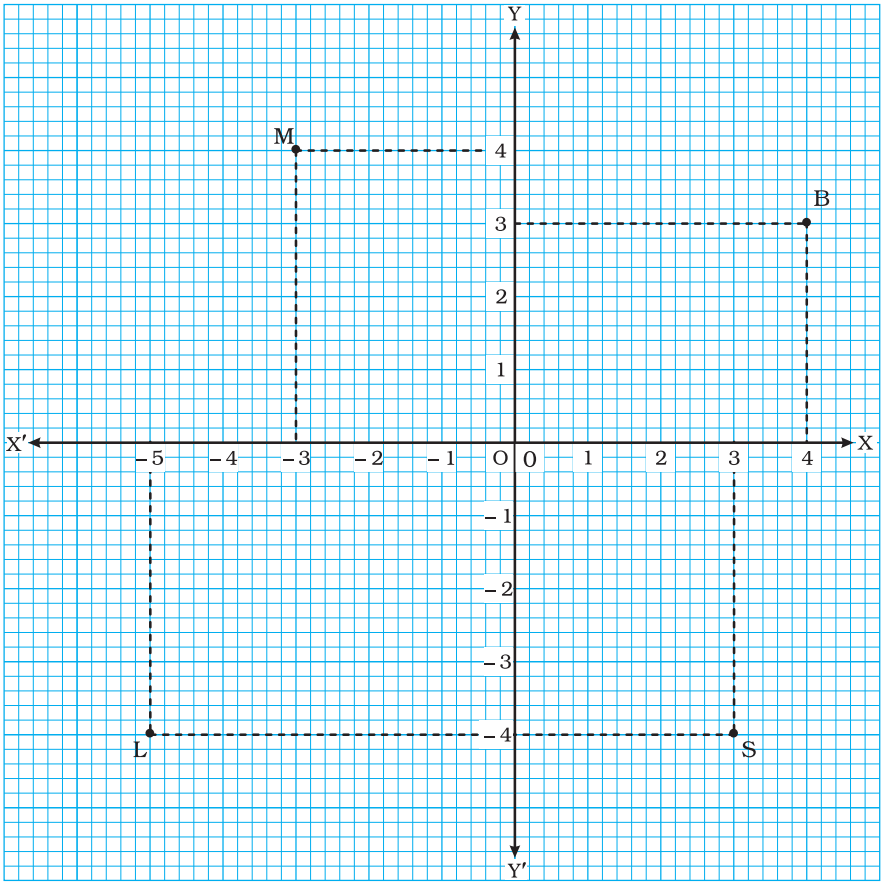
→ x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુને સંગત સંખ્યા એટલે કે x-યામ a હોય, પણ y-યામ 0 હોય. $(a, 0)$ (જ્યાં, a વાસ્તવિક સંખ્યા છે.)

→ y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુને સંગત સંખ્યા એટલે કે y-યામ b હોય, પણ x-યામ 0 હોય. $(0, b)$ (જ્યાં, b વાસ્તવિક સંખ્યા છે.)

* **કોઈ પણ ચરણમાં આવેલ બિંદુના યામ :** કોઈ પણ ચરણમાં આવેલ બિંદુના યામ શોધવા તે બિંદુમાંથી x-અક્ષ પર અને y-અક્ષ પર લંબ દોરવામાં આવે છે. x-અક્ષ પર દોરેલ લંબના લંબપાદ દ્વારા આપેલ બિંદુનો x-યામ મળે અને y-અક્ષ પર દોરેલ લંબના લંબપાદ દ્વારા આપેલ બિંદુનો y-યામ મળે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. નીચેની આકૃતિ જુઓ અને નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :



(i) બિંદુ **B**ના ભુજ અને કોટિ અનુક્રમે ..... અને ..... છે. આથી બિંદુ **B**ના યામ (....., ...) છે.
(ii) બિંદુ **M**ના ***x*-યામ** અને ***y*-યામ** અનુક્રમે ..... અને ..... છે. આથી બિંદુ **M**ના યામ (....., ...) છે.
(iii) બિંદુ **L**ના ***x*-યામ** અને ***y*-યામ** અનુક્રમે ..... અને ..... છે. આથી બિંદુ **L**ના યામ (....., ...) છે.
(iv) બિંદુ **S**ના ***x*-યામ** અને ***y*-યામ** અનુક્રમે ..... અને ..... છે. આથી બિંદુ **S**ના યામ (....., ...) છે.

(i) બિંદુ B એ y-અક્ષથી x-અક્ષની ધન દિશામાં 4 એકમ અંતરે છે. આથી બિંદુ Bનો ભુજ **4** છે. બિંદુ B એ x-અક્ષથી y-અક્ષની ધન દિશામાં 3 એકમ અંતરે છે. તેથી બિંદુ Bનો કોટિ **3** છે. આથી બિંદુ Bના યામ **(4, 3)** છે.

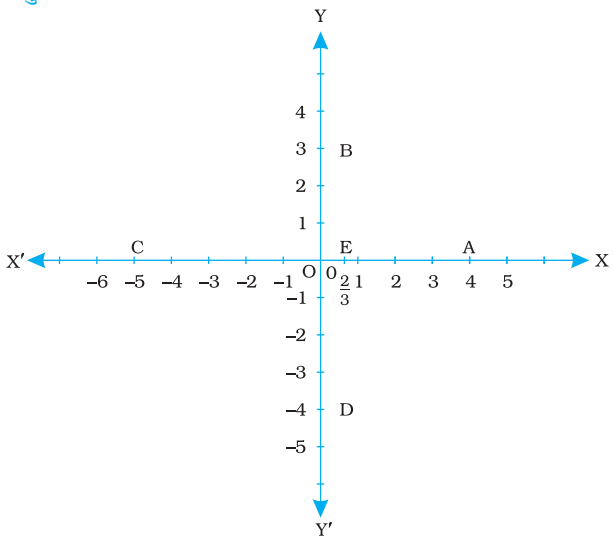
ઉપર (i) મુજબ,

(ii) બિંદુ Mના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે **– 3** અને **4** છે. આથી બિંદુ Mના યામ **(– 3, 4)** છે.

(iii) બિંદુ Lના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે **– 5** અને **– 4** છે. આથી બિંદુ Mના યામ **(– 5, – 4)** છે.

(iv) બિંદુ Sના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે **3** અને **– 4** છે. આથી બિંદુ Sના યામ **(3, – 4)** છે.

2. નીચેની આકૃતિમાં અક્ષો ઉપરનાં બિંદુઓના યામ લખો :



(i) બિંદુ A y-અક્ષથી + 4 અંતરે છે અને x-અક્ષથી 0 અંતરે છે. તેથી બિંદુ Aનો x-યામ 4 છે અને y-યામ 0 છે. આથી બિંદુ Aના યામ (4, 0) છે.

(ii) શા માટે બિંદુ Bના યામ (0, 3) છે?

(iii) શા માટે બિંદુ Cના યામ (– 5, 0) છે?

(iv) શા માટે બિંદુ Dના યામ (0, – 4) છે?

(v) શા માટે બિંદુ Eના યામ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ છે?

(ii) બિંદુ B y-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે અને x-અક્ષથી + 3 અંતરે હોવાથી તેના યામ (0, 3) છે.

(iii) બિંદુ C y-અક્ષથી – 5 અંતરે અને x-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે હોવાથી તેના યામ (– 5, 0) છે.

(iv) બિંદુ D y-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે અને x-અક્ષથી – 4 અંતરે હોવાથી તેના યામ (0, – 4) છે.

(v) બિંદુ E y-અક્ષથી $+\frac{2}{3}$ અંતરે અને x-અક્ષથી શૂન્ય અંતરે હોવાથી તેના યામ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2 | પાના નં. 48

1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) યામ-સમતલમાં કોઈ પણ બિંદુ દર્શાવવા ઉપયોગમાં લેવાતી સમક્ષિતિજ અને શિરોલંબ રેખાઓનાં નામ શું છે?

(ii) આ બે રેખાઓથી બનતા સમતલના દરેક ભાગનું નામ શું છે?

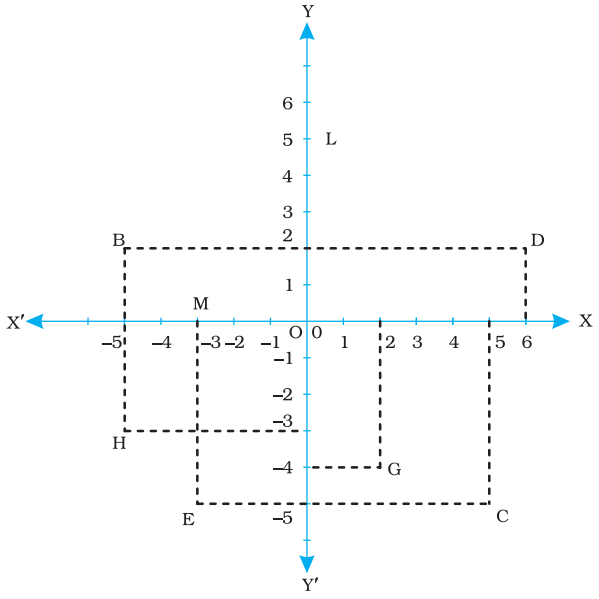
(iii) આ બે રેખાઓ જ્યાં છેદે તે બિંદુનું નામ લખો.

(i) યામ-સમતલમાં કોઈ પણ બિંદુ દર્શાવવા ઉપયોગમાં લેવાતી સમક્ષિતિજ રેખાનું નામ **x-અક્ષ** અને શિરોલંબ રેખાનું નામ **y-અક્ષ** છે.

(ii) આ બે રેખાઓ (x-અક્ષ તથા y-અક્ષ) દ્વારા બનતા સમતલના દરેક ભાગને **ચરણ અથવા પાદ** કહે છે.

(iii) આ બે રેખાઓ (x-અક્ષ તથા y-અક્ષ) જ્યાં છેદે તે બિંદુને **ઉગમબિંદુ** કહે છે.

2. નીચેની આકૃતિ જુઓ અને માગ્યા પ્રમાણે જવાબ લખો :

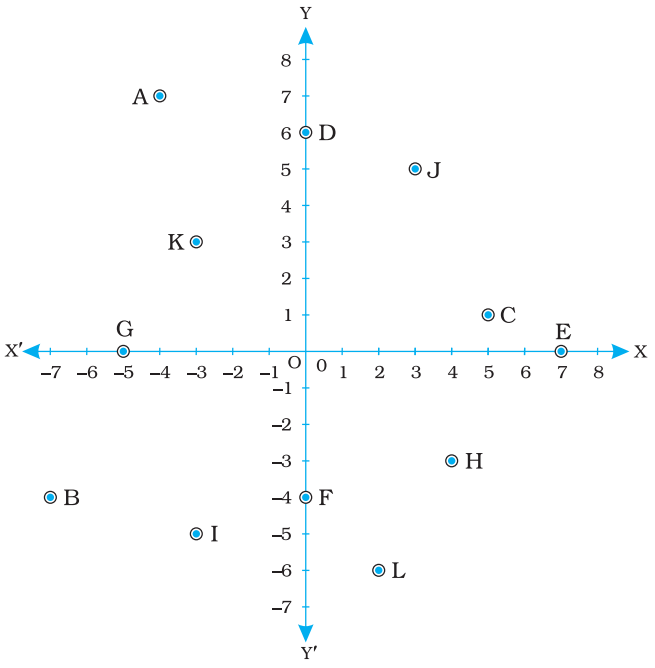


(i) બિંદુ B ના યામ જણાવો.
(ii) બિંદુ C ના યામ જણાવો.
(iii) (– 3, – 5) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.
(iv) (2, – 4) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.
(v) બિંદુ D નો x-યામ જણાવો.
(vi) બિંદુ H નો y-યામ જણાવો.
(vii) બિંદુ L ના યામ જણાવો.
(viii) બિંદુ M ના યામ જણાવો.

(i) બિંદુ B ના યામ **(– 5, 2)** છે.
(ii) બિંદુ C ના યામ **(5, – 5)** છે.
(iii) (– 3, – 5) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ **E** છે.
(iv) (2, – 4) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ **G** છે.
(v) બિંદુ D નો x-યામ **6** છે.
(vi) બિંદુ H નો y-યામ **– 3** છે.
(vii) બિંદુ L ના યામ **(0, 5)** છે.
(viii) બિંદુ M ના યામ **(– 3, 0)** છે.

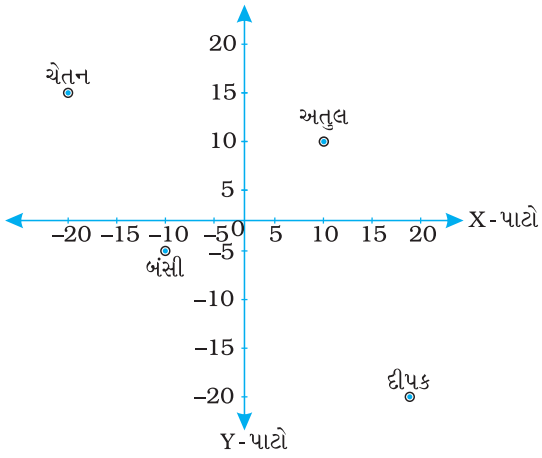
દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. **નીચેની આકૃતિ જોઈ આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો :**



(1) બિંદુ A ના યામ જણાવો.
(2) બિંદુ B નો y-યામ જણાવો.
(3) બિંદુ C નો x-યામ જણાવો.
(4) (3, 5) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.
(5) (2, – 6) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.
(6) બિંદુ D ના યામ જણાવો.
(7) બિંદુ G ના યામ જણાવો.
(8) બિંદુ K નો x-યામ જણાવો.
(9) બિંદુ E ના યામ જણાવો.
(10) બિંદુ I નો y-યામ જણાવો.
(11) બિંદુ H નો x-યામ જણાવો.
(12) બિંદુ F ના યામ જણાવો.
(13) બિંદુ O ના યામ જણાવો.
(14) y-અક્ષથી 3 એકમ લંબઅંતરે આવેલ બિંદુઓનાં નામ અને યામ લખો.
(15) x-અક્ષથી 3 એકમ લંબઅંતરે આવેલ બિંદુઓનાં નામ અને યામ લખો.
(16) બિંદુ G અને બિંદુ E વચ્ચેનું અંતર જણાવો.
(17) બિંદુ D અને બિંદુ F વચ્ચેનું અંતર જણાવો.

2.



શાળાના મેદાનની બરાબર વચ્ચે એક ઊભો અને એક આડો એમ બે પાટા દોરેલ છે. બંને પાટા (આડો પાટો X-પાટો અને ઊભો પાટો Y-પાટો) જ્યાં છેદે છે ત્યાંથી દરેક પાટા પર ધન દિશામાં તથા ઋણ દિશામાં 5 મીટરના અંતરે નિશાન કરેલ છે. ચાર વિદ્યાર્થીઓ અતુલ, બંસી, ચેતન અને દીપક તેમના નિશ્ચિત સ્થાને ઊભા છે.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) X-પાટાથી સૌથી નજીક કોણ ઊભું છે?

(2) Y-પાટાથી 20 એકમ અંતરે ઊભેલ વિદ્યાર્થીઓનાં નામ જણાવો.

(3) X-પાટાથી 20 એકમ અંતરે ઊભેલ વિદ્યાર્થીનું નામ જણાવો.

(4) Y-પાટાથી 10 એકમ અંતરે ઊભેલ વિદ્યાર્થીઓનાં નામ જણાવો.

જવાબો : 1. (1) $(-4, 7)$ (2) -4 (3) 5
(4) J (5) L (6) $(0, 6)$
(7) $(-5, 0)$ (8) -3 (9) $(7, 0)$
(10) -5 (11) 4 (12) $(0, -4)$
(13) $(0, 0)$
(14) J $(3, 5)$, K $(-3, 3)$, I $(-3, -5)$
(15) K $(-3, 3)$ અને H $(4, -3)$
(16) 12 એકમ (17) 10 એકમ

2. (1) બંસી
(2) ચેતન અને દીપક
(3) દીપક
(4) અતુલ અને બંસી

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) ઉગમબિંદુના યામ ..... છે.
($(5, 5)$, $(-5, -5)$, $(0, 0)$)

(2) y-અક્ષ પર આવેલ બિંદુનો x-યામ ..... હોય.
(ધન, ઋણ, 0)

(3) $\angle X'OY'$ના અંદરના ભાગને ..... ચરણ કહે છે.
(પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય)

(4) બિંદુ $(-2, 8)$ એ ..... ચરણમાં છે.
(પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય)

(5) ચતુર્થ ચરણમાં આવેલ બિંદુનો y-યામ ..... હોય.
(ધન, ઋણ, શૂન્ય)

(6) $\angle XOY$ના અંદરના ભાગને ..... ચરણ કહે છે.
(પ્રથમ, તૃતીય, ચતુર્થ)

(7) જે બિંદુના બંને યામ ઋણ હોય, તે બિંદુ ..... ચરણમાં હોય. *(દ્વિતીય, તૃતીય, ચતુર્થ)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) બિંદુ $(0, -18)$ કયા કિરણ પર આવેલ છે?

(2) જે બિંદુના બંને યામ ઋણ હોય તે બિંદુ કયા ચરણમાં હોય?

(3) $m < 0$ અને $n > 0$ હોય, તો બિંદુ (m, n) કયા ચરણમાં હોય?

(4) x-અક્ષ પર આવેલ બિંદુનો કયો યામ શૂન્ય હોય?

(5) બિંદુ $(0, 7)$નું ઉગમબિંદુથી અંતર શોધો.

(6) બિંદુ $(-12, 0)$નું ઉગમબિંદુથી અંતર શોધો.

(7) બિંદુ $(-5, 0)$ કયા કિરણ પર આવેલ છે?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) જો બિંદુ $(-5, a)$ x-અક્ષ પર આવેલ હોય, તો aની કિંમત ..... છે.
A. 5 B. -5 C. 25 D. 0

(2) બિંદુ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ એ ..... ચરણમાં છે.
A. પ્રથમ B. દ્વિતીય C. તૃતીય D. ચતુર્થ

(3) x-અક્ષ બિંદુ .....માંથી પસાર ન થાય.
A. $(7, 0)$ B. $(0, 3)$ C. $(-12, 0)$ D. $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

(4) જો $(a + 3, 7)$ અને $(8, b - 2)$ સમાન બિંદુઓ દર્શાવતા હોય, તો બિંદુ (a, b) એ ..... ચરણમાં છે.
A. પ્રથમ B. દ્વિતીય C. તૃતીય D. ચતુર્થ

(5) બિંદુ $(0, -12)$ એ ..... છે.
A. પ્રથમ ચરણમાં B. તૃતીય ચરણમાં
C. x-અક્ષ પર D. y-અક્ષ પર

(6) જો $(a + 2, -3)$ અને $(5, b + 1)$ સમાન બિંદુઓ દર્શાવતા હોય, તો બિંદુ (a, b) એ ..... ચરણમાં છે.
A. પ્રથમ B. દ્વિતીય C. તૃતીય D. ચતુર્થ

(7) જો $(2a + 5, 10)$ અને $(-3, 3b + 1)$ સમાન બિંદુઓ દર્શાવતા હોય, તો બિંદુ (b, a) એ ..... ચરણમાં છે.
A. પ્રથમ B. દ્વિતીય C. તૃતીય D. ચતુર્થ

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) બિંદુ $(-7, 2)$ એ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

(2) A $(0, 7)$ એ y-અક્ષનું બિંદુ છે.

(3) બિંદુઓ P $(5, 0)$ અને Q $(-3, 0)$ માટે PQ = 8.

(4) બિંદુ $(-5, -8)$ એ તૃતીય ચરણમાં છે.

(5) $a = 5,\ b = 3,\ c = -2$ અને $d = -5$ માટે, બિંદુ $(a + c,\ b + d)$ એ પ્રથમ ચરણમાં છે.

(6) બિંદુઓ A $(0,\ -3)$ અને B $(0,\ 8)$ માટે AB = 5.

(7) $p = 7,\ q = 3,\ r = -3$ અને $s = -5$ માટે, બિંદુ $(p + r,\ q - s)$ એ ચતુર્થ ચરણમાં છે.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. બિંદુ $(5,\ -2)$નું સ્થાન	a. કિરણ OY′ પર
2. બિંદુ $(3,\ 7)$નું સ્થાન	b. કિરણ OY પર
3. $(7,\ 0)$ અને $(-5,\ 0)$ વચ્ચેનું અંતર	c. ચતુર્થ ચરણમાં
4. બિંદુ $(0,\ -5)$નું સ્થાન	d. 12 એકમ
5. બિંદુ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$નું સ્થાન	e. કિરણ OX′ પર
6. $(0,\ 3)$ અને $(0,\ -12)$ વચ્ચેનું અંતર	f. પ્રથમ ચરણમાં
7. બિંદુ $(-4,\ 0)$નું સ્થાન	g. 15 એકમ
8. બિંદુ $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$નું સ્થાન	h. તૃતીય ચરણમાં
	i. 10 એકમ
	j. દ્વિતીય ચરણમાં

જવાબો

1. (1) $(0,\ 0)$ (2) 0 (3) તૃતીય (4) દ્વિતીય (5) ઋણ (6) પ્રથમ (7) તૃતીય

2. (1) OY′ (2) તૃતીય (3) દ્વિતીય (4) y-યામ (5) 7 (6) 12 (7) OX′

3. (1) D. 0 (2) D. ચતુર્થ (3) B. $(0,\ 3)$ (4) A. પ્રથમ (5) D. y-અક્ષ પર (6) D. ચતુર્થ (7) D. ચતુર્થ

4. (1) ખોટું (2) ખરું (3) ખરું (4) ખરું (5) ખોટું (6) ખોટું (7) ખોટું

5. $1 \to c,\ 2 \to f,\ 3 \to d,\ 4 \to a,\ 5 \to h,\ 6 \to g,\ 7 \to e,\ 8 \to j.$

4 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો
(LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

યાદ રાખો

* **એકચલ સુરેખ સમીકરણ (Linear equation in one variable) :** જે સમીકરણમાં એક જ ચલ હોય અને ચલનો ઘાતાંક 1 હોય, તે સમીકરણને એકચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

  એકચલ સુરેખ સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $ax + b = c$ (જ્યાં a, b, c અચળાંકો છે અને $a \neq 0$) છે.

  દા. ત., $x + 5 = 10$, $x - 3 = 15$, $\sqrt{3}x - \sqrt{7} = 0$ એ એકચલ સુરેખ સમીકરણો છે.

* **દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ (Linear equation in two variables) :** જે સમીકરણમાં બે ચલ હોય અને બંને ચલના ઘાતાંક 1 હોય અને xyવાળું પદ ન હોય, તો તે સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

  દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ (a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. a તથા b એકસાથે શૂન્ય નથી (એટલે કે $a^2 + b^2 \neq 0$)) છે.

  દા. ત., $2x + 3y = 5$, $5x - 2y = 7$,

  $\sqrt{5}x - \frac{3}{2}y = 7$

  એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો છે.

* જ્યારે $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉલ્લેખ આવે ત્યારે શરત a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a તથા b એકસાથે શૂન્ય નથી તેમ સ્વીકારી લઈશું.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવો અને દરેકમાં a, b અને cની કિંમતો દર્શાવો :

(i) $2x + 3y = 4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$

(iv) $2x = y$

(i) $2x + 3y = 4.37$ સમીકરણને $\mathbf{2x + 3y - 4.37 = 0}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં, $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = 3}$ અને $\mathbf{c = -4.37}$.

(ii) સમીકરણ $x - 4 = \sqrt{3}y$ને $\mathbf{x - \sqrt{3}y - 4 = 0}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં, $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = -\sqrt{3}}$ અને $\mathbf{c = -4}$.

(iii) સમીકરણ $4 = 5x - 3y$ને $\mathbf{5x - 3y - 4 = 0}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં, $\mathbf{a = 5}$, $\mathbf{b = -3}$ અને $\mathbf{c = -4}$.

આ સમીકરણને $\mathbf{-5x + 3y + 4 = 0}$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય. આ કિસ્સામાં $\mathbf{a = -5}$, $\mathbf{b = 3}$ અને $\mathbf{c = 4}$.

(iv) સમીકરણ $2x = y$ને $\mathbf{2x - y + 0 = 0}$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં, $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -1}$ અને $\mathbf{c = 0}$.

2. નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) $x = -5$

(ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$

(iv) $5y = 2$

(i) $x = -5$ને $\mathbf{1x + 0y = -5}$ અથવા $\mathbf{1x + 0y + 5 = 0}$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(ii) $y = 2$ને $\mathbf{0x + 1y = 2}$ અથવા $\mathbf{0x + 1y - 2 = 0}$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iii) $2x = 3$ને $\mathbf{2x + 0y - 3 = 0}$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iv) $5y = 2$ને $\mathbf{0x + 5y - 2 = 0}$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1 | પાના નં. 52

1. "નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી (બે ગણી) છે." આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો. (નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો.)

ધારો કે, નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y છે.
આપેલ માહિતી મુજબ નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી છે.

$\therefore x = 2y$

આમ, $x = 2y$, એટલે કે, $\mathbf{x - 2y = 0}$ એ માગેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ છે.

2. નીચે દર્શાવેલા દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને $ax + by + c = 0$ તરીકે દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં a, b અને cની કિંમત શોધો :

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ **(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$**
(iii) $-2x + 3y = 6$ **(iv) $x = 3y$**
(v) $2x = -5y$ **(vi) $3x + 2 = 0$**
(vii) $y - 2 = 0$ **(viii) $5 = 2x$**

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$

$\therefore \mathbf{2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 2,\ b = 3}$ અને $\mathbf{c = -9.3\overline{5}}$.

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$

$\therefore \mathbf{x - \frac{1}{5}y - 10 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 1,\ b = -\frac{1}{5}}$ અને $\mathbf{c = -10}$.

(iii) $-2x + 3y = 6$

$\therefore \mathbf{-2x + 3y - 6 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = -2,\ b = 3}$ અને $\mathbf{c = -6}$.

(iv) $x = 3y$

$\therefore \mathbf{x - 3y + 0 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 1,\ b = -3}$ અને $\mathbf{c = 0}$.

(v) $2x = -5y$

$\therefore \mathbf{2x + 5y + 0 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 2,\ b = 5}$ અને $\mathbf{c = 0}$.

(vi) $3x + 2 = 0$

$\therefore \mathbf{3x + 0y + 2 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 3,\ b = 0}$ અને $\mathbf{c = 2}$.

(vii) $y - 2 = 0$

$\therefore \mathbf{0x + y - 2 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = 0,\ b = 1}$ અને $\mathbf{c = -2}$.

(viii) $5 = 2x$

$\therefore 5 - 2x = 0$

$\therefore \mathbf{-2x + 0y + 5 = 0}$

અહીં, $\mathbf{a = -2,\ b = 0}$ અને $\mathbf{c = 5}$.

દૃઢીકરણ માટેનો દાખલો

1. નીચે આપેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને પ્રમાણિત સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો તથા a, b અને cની કિંમતો જણાવો :

(1) $4x = 5y + 2$ (2) $5x - 3y = 2.\overline{8}$
(3) $\frac{1}{6}x = \frac{1}{4}y + 3$ (4) $y = 4x - 1$
(5) $3x = 7 - 2y$ (6) $-3x + 4y = 12$
(7) $5y = 3x$ (8) $2x - 3y = 0$
(9) $4x - 8 = 0$ (10) $3y = 15$

જવાબો : 1. (1) $4x - 5y - 2 = 0$; $a = 4,\ b = -5,\ c = -2$

(2) $5x - 3y - 2.\overline{8} = 0$;
$a = 5,\ b = -3,\ c = -2.\overline{8}$

(3) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}y - 3 = 0$;
$a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{4},\ c = -3$

અથવા

$2x - 3y - 36 = 0$;
$a = 2,\ b = -3,\ c = -36$

(4) $4x - y - 1 = 0$; $a = 4,\ b = -1,\ c = -1$

(5) $3x + 2y - 7 = 0$; $a = 3,\ b = 2,\ c = -7$

(6) $-3x + 4y - 12 = 0$; $a = -3,\ b = 4,\ c = -12$

(7) $3x - 5y + 0 = 0$; $a = 3,\ b = -5,\ c = 0$

અથવા

$-3x + 5y + 0 = 0$; $a = -3,\ b = 5,\ c = 0$

(8) $2x - 3y + 0 = 0$; $a = 2,\ b = -3,\ c = 0$

(9) $4x + 0y - 8 = 0$; $a = 4,\ b = 0,\ c = -8$

(10) $0x + 3y - 15 = 0$; $a = 0,\ b = 3,\ c = -15$

યાદ રાખો

* દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં બે ચલ છે એટલે તેના ઉકેલનો અર્થ સમીકરણનું સમાધાન કરતી x તથા yનાં મૂલ્યોની જોડ.

  દા. ત., $x + y = 10$ દ્વિચલ સમીકરણ લઈએ જેમાં $x = 6$ અને $y = 4$ લઈએ, તો $6 + 4 = 10$

  આમ, $x = 6$ અને $y = 4$ એ સમીકરણ $x + y = 10$નો એક ઉકેલ છે અથવા ક્રમયુક્ત જોડ (6, 4) એ આ સમીકરણનો એક ઉકેલ છે.

  વળી, જુઓ કે ક્રમયુક્ત જોડ (5, 5), (8, 2), (1, 9), (12, −2), (15, −5) એ પણ આ સમીકરણના ઉકેલ છે.

* દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ $ax + by + c = 0$ને તેના y-સ્વરૂપમાં ફેરવતા ઉકેલ સહેલાઈથી મળે.

  $ax + by + c = 0$નું y-સ્વરૂપ $y = \frac{-c - ax}{b}$ છે.

  આમાં xનાં મૂલ્યો મૂકતાં yનાં મૂલ્યો સહેલાઈથી મળી શકે.

* દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.

* જો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ $ax + by + c = 0$ના ફક્ત બે જ ઉકેલ શોધવા હોય, તો એક વખત $x = 0$ અને બીજી વખત $y = 0$ લેતાં મળતાં એકચલ સમીકરણો અનુક્રમે $by + c = 0$ અને $ax + c = 0$ના ઉકેલ પરથી બે ઉકેલ સહેલાઈથી મળી જાય.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

3. સમીકરણ $x + 2y = 6$ના ચાર ભિન્ન ઉકેલો મેળવો.

$x = 2$, $y = 2$ ચકાસતાં તે ઉકેલ છે, કારણ કે $x = 2$, $y = 2$ માટે $x + 2y = 2 + 4 = 6$

હવે, $x = 0$ પસંદ કરીએ. xની આ કિંમત મૂકવાથી આપેલ સમીકરણનું રૂપાંતર $2y = 6$માં થઈ જશે. તેને અનન્ય ઉકેલ $y = 3$ હોય. આથી $x = 0$, $y = 3$ પણ $x + 2y = 6$નો ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી, આપેલ સમીકરણ $x = 6$માં રૂપાંતરિત થશે. આથી $x = 6$, $y = 0$ પણ સમીકરણ $x + 2y = 6$નો ઉકેલ થાય. અંતે, આપણે $y = 1$ લઈએ, તો આપેલ સમીકરણ $x + 2 = 6$માં રૂપાંતરિત થશે. તેનો ઉકેલ $x = 4$ થાય. આથી (4, 1) પણ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. આથી આપેલા સમીકરણના અનંત ઉકેલો પૈકીના ચાર ઉકેલ **(2, 2), (0, 3), (6, 0) અને (4, 1)** છે.

4. નીચે આપેલા પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલો શોધો :

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

(i) $x = 0$ લેતાં, $3y = 12$ મળે. તેથી $y = 4$. આમ, **(0, 4)** આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી $x = 3$ મળે તેથી **(3, 0)** પણ ઉકેલ થાય.

(ii) $x = 0$ લેવાથી $5y = 0$ મળે. જેથી $y = 0$ થાય. આમ **(0, 0)** આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. બીજો ઉકેલ મેળવવા $x = 1$ લેતાં yની અનુરૂપ કિંમત $-\frac{2}{5}$ મળે. આથી $\left(\mathbf{1, -\frac{2}{5}}\right)$ એ $2x + 5y = 0$નો બીજો ઉકેલ છે.

(iii) સમીકરણ $3y + 4 = 0$ને $0x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે લખી શકાય. xની કોઈ પણ કિંમત માટે $y = -\frac{4}{3}$ મળશે. આથી બે ઉકેલો $\left(\mathbf{0, -\frac{4}{3}}\right)$ અને $\left(\mathbf{1, -\frac{4}{3}}\right)$ મળે.

સ્વાધ્યાય 4.2 | પાના નં. 54

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે અને શા માટે?

$y = 3x + 5$ને (i) અનન્ય ઉકેલ હોય. (ii) માત્ર બે ઉકેલ હોય. (iii) અનંત ઉકેલ હોય.

વિકલ્પ **(iii) એ સાચો વિકલ્પ છે.** $y = 3x + 5$ એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ હોવાથી તેને (1, 8), (2, 11), (3, 14), (4, 17), (0, 5), (– 1, 2) જેવાં અનંત ઉકેલ હોય.

2. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલ લખો :

(i) $2x + y = 7$

(ii) $\pi x + y = 9$

(iii) $x = 4y$

(i) $2x + y = 7$

$\therefore y = 7 - 2x$

xની કિંમતો 0, 1, 2, 3 લેતાં આપણને yની કિંમતો અનુક્રમે 7, 5, 3 અને 1 મળે. આથી **(0, 7), (1, 5), (2, 3) અને (3, 1)** એ સમીકરણ $2x + y = 7$ના અનંત ઉકેલ પૈકીના ચાર ઉકેલ છે.

(ii) $\pi x + y = 9$

$\therefore y = 9 - \pi x$

$x = 0$ લેતાં, $y = 9$ મળે.

$x = 1$ લેતાં, $y = 9 - \pi$ મળે.

$x = -1$ લેતાં, $y = 9 + \pi$ મળે.

$x = \frac{1}{\pi}$ લેતાં, $y = 8$ મળે.

આથી **(0, 9), (1, 9 – π), (– 1, 9 + π) અને** $\left(\frac{1}{\pi}, 8\right)$ એ સમીકરણ $\pi x + y = 9$ના અનંત ઉકેલ પૈકીના ચાર ઉકેલ છે.

(iii) $x = 4y$

$y = 0$ લેતાં, $x = 0$ મળે.

$y = 1$ લેતાં, $x = 4$ મળે.

$y = -1$ લેતાં, $x = -4$ મળે.

$y = 2$ લેતાં, $x = 8$ મળે.

આથી **(0, 0), (4, 1), (– 4, – 1) અને (8, 2)** એ સમીકરણ $x = 4y$ના અનંત ઉકેલ પૈકીના ચાર ઉકેલ છે.

3. નીચેનામાંથી કયાં બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ના ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી, તે ચકાસો :

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0)

(iv) ($\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$) (v) (1, 1)

(i) (0, 2)

સમીકરણ $x - 2y = 4$માં $x = 0$ અને $y = 2$ મૂકતાં, આપણને સમીકરણની ડા.બા. $= 0 - 2(2) = -4$ મળે. પરંતુ સમીકરણની જ.બા. 4 છે. આથી (0, 2) એ આપેલ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો **ઉકેલ નથી.**

(ii) (2, 0)

સમીકરણ $x - 2y = 4$માં $x = 2$ અને $y = 0$ મૂકતાં, આપણને સમીકરણની ડા.બા. $= 2 - 2(0) = 2$ મળે. પરંતુ સમીકરણની જ.બા. 4 છે. આથી (2, 0) એ આપેલ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો **ઉકેલ નથી.**

(iii) (4, 0)

સમીકરણ $x - 2y = 4$માં $x = 4$ અને $y = 0$ મૂકતાં, આપણને સમીકરણની ડા.બા. $= 4 - 2 \times 0 = 4$ મળે. અને સમીકરણની જ.બા. પણ 4 છે. આથી (4, 0) એ આપેલ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો **ઉકેલ છે.**

(iv) ($\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$)

સમીકરણ $x - 2y = 4$માં $x = \sqrt{2}$ અને $y = 4\sqrt{2}$ મૂકતાં, આપણને સમીકરણની ડા.બા. $= \sqrt{2} - 2(4\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -7\sqrt{2}$ મળે, પરંતુ સમીકરણની જ.બા. 4 છે. આથી ($\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$) એ આપેલ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો **ઉકેલ નથી.**

(v) (1, 1)

સમીકરણ $x - 2y = 4$માં $x = 1$ અને $y = 1$ મૂકતાં, આપણને સમીકરણની ડા.બા. $= 1 - 2(1) = -1$ મળે. પરંતુ સમીકરણની જ.બા. 4 છે. આથી (1, 1) એ આપેલ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો **ઉકેલ નથી.**

4. જો $x = 2$, $y = 1$ એ સમીકરણ $2x + 3y = k$નો એક ઉકેલ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

$x = 2$, $y = 1$ એ સમીકરણ $2x + 3y = k$નો એક ઉકેલ છે. આથી $x = 2$ અને $y = 1$ દ્વારા સમીકરણનું સમાધાન થાય.

$\therefore 2(2) + 3(1) = k$

$\therefore 4 + 3 = k$

$\therefore 7 = k$

$\therefore$ **$k = 7$**

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલો લખો :

(1) $x + y = 7$ (2) $2x - y = 12$

(3) $y = 3x$ (4) $x - y = 5$

2. નીચેનામાંથી કયાં બિંદુઓ સમીકરણ $2x + 3y = 24$ ના ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી, તે તપાસો :

(1) (12, 0) (2) $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

(3) (6, 4) (4) (24, –8)

(5) (3, 2) (6) (30, –12)

3. જો $x = 2$ અને $y = 5$ એ સમીકરણ $5x + 2y = k$નો એક ઉકેલ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

4. જો $x = 5$ અને $y = 4$ એ સમીકરણ $4x - ky = 10$નો એક ઉકેલ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

5. અહીં, સેલ્સિયસનું ફેરનહીટમાં રૂપાંતર કરતું સુરેખ સમીકરણ આપેલ છે.

$F = 1.8\,C + 32$

(1) જો તાપમાન 40 °C હોય, તો ફેરનહીટમાં શું તાપમાન થાય ?

(2) જો તાપમાન 140 °F હોય, તો સેલ્સિયસમાં શું તાપમાન થાય ?

(3) જો તાપમાન – 30 °C હોય, તો ફેરનહીટમાં શું તાપમાન થાય ?

(4) જો તાપમાન – 58 °F હોય, તો સેલ્સિયસમાં શું તાપમાન થાય ?

જવાબો : 1. (1) (7, 0), (0, 7), (1, 6), (2, 5)

(2) (6, 0), (0, – 12), (1, – 10), (2, – 8)

(3) (0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9)

(4) (5, 0), (0, – 5), (1, – 4), (2, – 3)

2. (1), (3), (4) અને (6) ઉકેલ છે.

(2) અને (5) ઉકેલ નથી.

3. $k = 20$

4. $k = 2.5$

5. (1) 104 °F (2) 60 °C

(3) – 22 °F (4) – 50 °C

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. *કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : (ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમીકરણ $4x - 3y = 24$ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ..... લખાય. *($4x - 3y + 24 = 0$, $4x - 3y - 24 = 0$, $4x + 3y + 24 = 0$)*

(2) $3x + 5y = k$નો એક ઉકેલ (3, 3) હોય, તો k = ... *(8, 15, 24)*

(3) $F = \left(\frac{9}{5}\right) C + 32$માં C = 15 હોય, તો F = ... *(59, 41, 35)*

(4) $4x - ky = 20$નો એક ઉકેલ (10, 4) હોય, તો k = ... *(– 10, –5, 5)*

(5) જો $5x - 3y = k$નો એક ઉકેલ (5, 7) હોય, તો k = ... *(46, 4, 6)*

(6) બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 36 અને તફાવત 4 હોય, તો તે પૈકીની નાની સંખ્યા ..... છે. *(40, 32, 16)*

2. *નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ એક સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : (ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમીકરણ $5x - 3y = 60$ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખો.

(2) $2x + 5y = k$નો એક ઉકેલ (3, 2) હોય, તો kની કિંમત શોધો.

(3) જો $13x + 12y = 60$ અને $12x + 13y = 40$ હોય, તો $x + y$ની કિંમત શોધો.

(4) સમીકરણ $3x - 4y = 12$નું y-સ્વરૂપ આપો.

(5) $3x - 5y = 30$ માટે, જો $x = 15$ હોય, તો y શોધો.

(6) $16x + 14y = 76$ અને $14x + 16y = 74$ હોય, તો $x - y$ની કિંમત શોધો.

(7) $3x = 45$ અને $y = \frac{x}{5}$ હોય, તો $2x + 3y$ની કિંમત શોધો.

3. *દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : (ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) બે અંકની સંખ્યામાં એકમનો અંક x અને દશકનો અંક y હોય, તો તે સંખ્યા ..... છે.

A. $x + y$ B. yx C. $10x + y$ D. $10y + x$

(2) સમીકરણ $\frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 6$ માટે, જો $x = 1$ હોય, તો y = ...

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 5 D. $\frac{1}{5}$

(3) બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 16 અને તફાવત 4 હોય, તો તે પૈકીની મોટી સંખ્યા ..... છે.

A. 16 B. 20 C. 10 D. 6

(4) બે અંકની સંખ્યાનો એકમનો અંક $x-5$ અને દશકનો અંક $y+2$ હોય, તો તે સંખ્યા ..... છે.

A. $10y+x+25$ B. $10y+x-3$

C. $10x+y-48$ D. $10y+x+15$

(5) કાવ્યા તથા આરિવની વર્તમાન ઉંમરનો ગુણોત્તર 5 : 4 છે તથા આરિવ અને આર્યાની વર્તમાન ઉંમરનો ગુણોત્તર 3 : 2 છે. જો આર્યાની વર્તમાન ઉંમર 8 વર્ષ હોય, તો કાવ્યાની વર્તમાન ઉંમર ..... વર્ષ હોય.

A. 12 B. 15 C. 20 D. 24

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) (6, 2) એ સમીકરણ $2x-3y=7$નો એક ઉકેલ છે.

(2) જો (2, 3) એ સમીકરણ $5x+ky=22$નો એક ઉકેલ હોય, તો $k=4$.

(3) જો (4, 1) એ સમીકરણ $3x+ky=8$નો એક ઉકેલ હોય, તો $k=4$.

(4) જો $(k, 7)$ એ સમીકરણ $5x+2y=29$નો એક ઉકેલ હોય, તો $k=3$.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. $2x+3y=17$ માટે જો $y=3$ હોય, તો $x=$	a. 14
2. (3, 2) એ $3x+5y=k$નો એક ઉકેલ હોય, તો $k=$	b. 7
3. જો $x+y=12$ અને $x-y=2$ હોય, તો $x=$	c. 4
4. (5, 4) એ $2x+ky=22$નો એક ઉકેલ હોય, તો $k=$	d. 18
5. જો $x+y=32$ અને $x-y=4$ હોય, તો $y=$	e. 19
6. $3x+5y=34$ માટે જો $x=3$ હોય, તો $y=$	f. 3
	g. 11
	h. 5

જવાબો

1. (1) $4x-3y-24=0$ (2) 24 (3) 59 (4) 5 (5) 4 (6) 16

2. (1) $5x-3y-60=0$ (2) 16 (3) 4 (4) $y=\frac{3x-12}{4}$ (5) 3 (6) 1 (7) 39

3. (1) D. $10y+x$ (2) B. 2 (3) C. 10 (4) D. $10y+x+15$ (5) B. 15

4. (1) ખોટું (2) ખરું (3) ખોટું (4) ખરું

5. 1 → c, 2 → e, 3 → b, 4 → f, 5 → a, 6 → h.

5 યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય (INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY)

યાદ રાખો

* ભૂમિતિને અંગ્રેજીમાં Geometry કહે છે. Geometry શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દના સંયોજનથી બનેલો છે. Geo અને Metrein. Geoનો અર્થ પૃથ્વી અને Metreinનો અર્થ માપ થાય.
* ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી થેલ્સને ભૂમિતિનો પ્રણેતા ગણવામાં આવે છે. સૌપ્રથમ ભૂમિતિ શબ્દનો પ્રયોગ તેમણે કર્યો હતો. **થેલ્સના વિદ્યાર્થી પાયથાગોરસ** અને તેના સાથીદારોએ ભૌમિતિક બાબતો શોધી હતી.
* ઈ. સ. પૂર્વે 800થી ઈ. સ. પૂર્વે 500ના ગાળામાં સૂલબાસૂત્રનું સર્જન થયું હતું. બોધાયન સૂલબાસૂત્ર સૌથી પ્રાચીન છે, તેમાંની રચનામાં પાયથાગોરસના સિદ્ધાંતની સાબિતીનો ઉપયોગ થયો હતો. જાહેર પ્રાર્થનાસભાઓમાં લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણ જેવા આકારનાં આસનોનો ઉપયોગ થતો હતો. આમ, ભારતીયો પાયથાગોરસના પ્રમેયને પાયથાગોરસના જન્મ પહેલાંથી જાણે છે. આર્યભટ્ટ, બ્રહ્મગુપ્ત, ભાસ્કરાચાર્ય વગેરે ભારતના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ભૂમિતિના વિકાસમાં ફાળો આપેલ છે.
* ઘન પદાર્થની ધાર એ અવકાશનું વિભાજન કરતી સપાટીઓ છે. સપાટીને જાડાઈ હોતી નથી. સપાટીની ધાર વક્ર કે રેખા હોય છે. રેખા અંતે તો બિંદુમાં પરિણમે છે. ઘનથી બિંદુ સુધી ક્રમશઃ આગળ વધતાં પરિમાણ ઘટતું જાય છે.

ભૌમિતિક પદાર્થ	પરિમાણ
ઘન	3
સપાટી	2
રેખા	1
બિંદુ	એક પણ નહિ

* યુક્લિડ ઇજિપ્તમાં એલેક્ઝાન્ડ્રિયાની શાળામાં ગણિતના શિક્ષક હતા. તેમણે પૂર્વધારણાઓ અને અગાઉ સિદ્ધ કરેલાં પરિણામોને આધારે તાર્કિક સાબિતીઓ આપી ભૂમિતિનો વિકાસ કર્યો. તેમણે 'Elements' નામના પુસ્તકમાં ભૂમિતિ વિશે 13 પ્રકરણો લખ્યાં હતાં. તેમણે પ્રથમ પ્રકરણમાં 23 વ્યાખ્યાઓ આપેલી જેમાંથી કેટલીક નીચે દર્શાવી છે :
  (1) બિંદુને કોઈ ભાગ નથી.
  (2) રેખા એ પહોળાઈ વગરની લંબાઈ છે.
  (3) રેખાને અંત્યબિંદુઓ હોય છે.
  (4) જે પોતાના પરનાં બિંદુઓની સાથે સમાન રીતે રહેલી હોય એવી રેખા એક સીધી રેખા છે.
  (5) પૃષ્ઠને માત્ર લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે.
  (6) પૃષ્ઠની ધાર રેખાઓ હોય છે.
  (7) જે સપાટી પોતાના પરની સીધી રેખાઓની સાથે એકસમાન રીતે રહેલ હોય તેવી સપાટી એ સમતલ છે.
* યુક્લિડે નોંધેલા **સ્વયંસિદ્ધ સત્યો** નીચે પ્રમાણે વર્ણવી શકાય :
  (1) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય.
  (2) સરખામાં સરખું ઉમેરીએ તો સરવાળા સરખા રહે.
  (3) સરખામાંથી સરખા બાદ કરીએ તો બાદબાકી (શેષફળ) સરખી રહે.
  (4) એકબીજા ઉપર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજાને સરખી થાય.
  (5) આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું હોય છે.
  (6) સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન થાય.
  (7) સરખી વસ્તુઓના અડધા એકબીજાને સમાન થાય.
* યુક્લિડની પાંચ **પૂર્વધારણાઓ** નીચે પ્રમાણે છે :
  (1) પૂર્વધારણા 1 : એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુમાં થઈને પસાર થતી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.
  પૂર્વધારણા 5.1 : આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય રેખા હોય છે.
  (2) પૂર્વધારણા 2 : સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય છે.
  નોંધ : યુક્લિડ 'રેખાખંડ' માટે 'સાન્ત રેખા' શબ્દ પ્રયોજતા હતા.
  (3) પૂર્વધારણા 3 : કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.
  (4) પૂર્વધારણા 4 : બધા જ કાટખૂણા એકબીજા સાથે સરખા થાય.
  (5) પૂર્વધારણા 5 : જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણાના સરવાળા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતાં તેઓ એકબીજાને છેદે છે.
* બે પરસ્પર છેદતી રેખાઓમાંની બંને એકસાથે આપેલ રેખાને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.
* **પ્રમેય 5.1 :** બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. જો A, B અને C એક રેખા પર આવેલાં ત્રણ બિંદુઓ હોય અને B બિંદુ એ A અને Cની વચ્ચે આવેલ હોય, (જુઓ આકૃતિ) તો સાબિત કરો કે AB + BC = AC.



ઉપરની આકૃતિમાં AB + BCની સાથે AC સંપાતિ છે. વળી યુક્લિડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (4) કહે છે કે વસ્તુઓ જો પરસ્પર બંધબેસતી હોય તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. આથી તે સાબિત થાય છે કે AB + BC = AC. એ વાત ધ્યાનમાં રહે કે, આ ઉકેલમાં તે સ્વીકારી લેવામાં આવ્યું છે કે બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે.

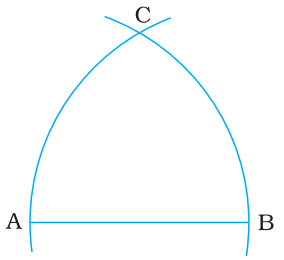
2. સાબિત કરો કે, આપેલા રેખાખંડ પર એક સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી શકાય છે.

ઉપરના વિધાનમાં આપેલ લંબાઈનો રેખાખંડ AB છે. [જુઓ આકૃતિ (1)].



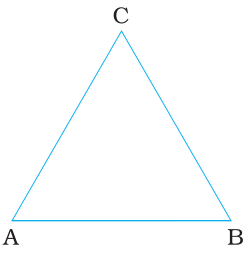
(1)

યુક્લિડની પૂર્વધારણા 3નો ઉપયોગ કરીને તમે બિંદુ Aને કેન્દ્ર અને ABને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ રચી શકો છો. [જુઓ આકૃતિ (2)]



(2)

તે જ રીતે Bને કેન્દ્ર અને BA ત્રિજ્યા લઈને એક અન્ય વર્તુળને રચી શકાય છે. માની લો કે આ બંને વર્તુળ બિંદુ Cમાં છેદે છે. હવે, રેખાખંડો AC અને BC દોરીને Δ ABC બનાવો. [જુઓ આકૃતિ (3)]



(3)

હવે, AB = AC છે. (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા) (1)

તે જ રીતે AB = BC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા) (2)

ઉપરની બંને હકીકત અને યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા કે જે એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય તે પરથી તારવી શકાય કે, AB = BC = AC છે.

આથી Δ ABC એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

* **પ્રમેય 5.1 : બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.**

સાબિતી : અહીં આપણને બે રેખાઓ l અને m આપેલ છે. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે, l અને mમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય નથી.

થોડી વાર માટે એવું ધારી લઈએ કે આ બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Qમાં એકબીજીને છેદે છે.

આ રીતે બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Qમાંથી પસાર થતી બે રેખાઓ l અને m મળે છે, પરંતુ આ ધારણા પૂર્વધારણા 'આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે'ની વિરુદ્ધ છે. આથી આપણે જે ધારણાથી ચાલ્યા હતા 'કે બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે' તે ખોટી છે.

આનાથી આપણે શું નિષ્કર્ષ તારવી શકીએ? આપણે એ નિષ્કર્ષ તારવવા માટે પ્રેરાઈએ છીએ કે બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય ન હોય.

સ્વાધ્યાય 5.1 | પાના નં. 62 – 63

1. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં વિધાનો સત્ય છે અને કયાં વિધાનો અસત્ય છે? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો :

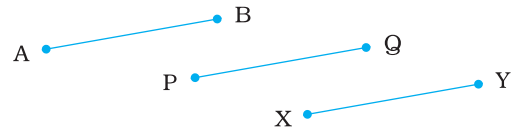
(i) એક બિંદુમાંથી પસાર થતી માત્ર એક રેખા દોરી શકાય છે.

(ii) બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અસંખ્ય રેખાઓ હોય છે.

(iii) એક સાન્ત રેખાને બંને તરફ અનિશ્ચિત રીતે લંબાવી શકાય છે.

(iv) જો બે વર્તુળ સમાન છે, તો તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય છે.

(v) નીચેની આકૃતિમાં જો AB = PQ અને PQ = XY છે, તો AB = XY થાય.



(i) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે**, કારણ કે એક બિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવી અસંખ્ય રેખાઓ દોરી શકાય. તેના સૌથી સરળ ઉદાહરણ તરીકે પરસ્પર છેદતી રેખાઓ અથવા પરસ્પર લંબ રેખાઓ લઈ શકાય. અહીં, બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુમાંથી બે રેખાઓ પસાર થાય છે.

(ii) આપેલ વિધાન **અસત્ય છે**, કારણ કે જો તેવું હોય તો બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર કદી વ્યાખ્યાયિત ન કરી શકાય. વળી તે પૂર્વધારણા 1નો વિરોધાભાસ કરે છે.

(iii) આપેલ વિધાન પૂર્વધારણા 2 અનુસાર **સત્ય છે**.

(iv) આપેલ વિધાન **સત્ય છે**. જો બે વર્તુળો સમાન હોય તો તેમના પરિઘ અને કેન્દ્ર એકબીજાને બંધબેસતા થાય. હવે, ત્રિજ્યા એ કેન્દ્ર અને પરિઘના કોઈ પણ બિંદુ વચ્ચેનું અંતર હોવાથી તે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ પણ સમાન હોય.

(v) આપેલ વિધાન સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 1 અનુસાર **સત્ય છે**. અહીં AB અને XY એક જ વસ્તુ PQને સમાન હોવાથી AB અને XY પણ સમાન થાય. એટલે કે AB = XY.

2. નીચે આપેલાં પદોની વ્યાખ્યા આપો. શું તેના માટે કોઈ એવાં પદ છે જેને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે? એ કયાં છે? અને તમે તેને કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરશો?

(i) સમાંતર રેખાઓ **(ii) લંબરેખાઓ**

(iii) રેખાખંડ **(iv) વર્તુળની ત્રિજ્યા**

(v) ચોરસ

(i) સમાંતર રેખાઓ : એક જ સમતલમાં આવેલી બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે નહીં તો તેમને સમાંતર રેખાઓ કહેવાય.

(ii) લંબરેખાઓ : જે બે રેખાઓ પરસ્પર કાટખૂણે છેદે તેમને લંબરેખાઓ કહેવાય.

(iii) રેખાખંડ : રેખાના એવા ભાગને રેખાખંડ કહે છે, જેને બે અંત્યબિંદુઓ હોય.

(iv) વર્તુળની ત્રિજ્યા : વર્તુળના કેન્દ્ર અને પરિઘ પરના કોઈ પણ બિંદુને જોડતા રેખાખંડને વર્તુળની ત્રિજ્યા કહેવાય.

નોંધ : વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપને પણ વર્તુળની ત્રિજ્યા કહેવામાં આવે છે.

(v) ચોરસ : જેની ચારેય બાજુઓ એકરૂપ હોય તથા ચારેય ખૂણા એકરૂપ હોય તેવા ચતુષ્કોણને ચોરસ કહેવાય.

અહીં રેખા, સમતલ, કાટખૂણો, વર્તુળનું કેન્દ્ર, પરિઘ અને ચતુષ્કોણ જેવાં પદો છે જેને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે. તે પૈકીના રેખા અને સમતલને વ્યાખ્યાયિત ન કરી શકાય કારણ કે તે અવ્યાખ્યાયિત પદો છે. બાકીનાં ચાર પદોની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય :

(i) કાટખૂણો : 90° માપવાળા ખૂણાને કાટખૂણો કહે છે.

(ii) વર્તુળનું કેન્દ્ર : વર્તુળના સમતલમાં આવેલું એવું બિંદુ કે જે વર્તુળના દરેક બિંદુથી સમાન અંતરે હોય તેને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહે છે.

(iii) પરિઘ : વર્તુળની પરિમિતિને પરિઘ કહે છે.

(iv) ચતુષ્કોણ : એક જ સમતલમાં આવેલ બંધ આકૃતિ કે જેને ચાર બાજુ અને ચાર ખૂણા હોય તેને ચતુષ્કોણ કહે છે.

3. નીચે આપેલ બે પૂર્વધારણાઓનો વિચાર કરો :

(i) જો બે ભિન્ન બિંદુ A અને B આપ્યાં હોય, તો તેમની વચ્ચે હોય તેવું એક બિંદુ C મળે.

(ii) એક રેખા પર ન આવેલાં હોય તેવા ઓછાંમાં ઓછાં ત્રણ બિંદુઓ મળે.

શું આ પૂર્વધારણાઓમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ સુસંગત છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ યુક્લિડની પૂર્વધારણામાંથી મળે છે? સ્પષ્ટ કરો.

હા. આ પૂર્વધારણાઓમાં બે અવ્યાખ્યાયિત પદ – બિંદુ અને રેખા આવેલ છે.

હા. આ પૂર્વધારણાઓ સુસંગત છે.

પૂર્વધારણા (i) દર્શાવે છે કે આપેલ બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B માટે એવું એક બિંદુ C મળે જે રેખા AB પર A અને Bની વચ્ચે હોય.

પૂર્વધારણા (ii) દર્શાવે છે કે આપેલ બે ભિન્ન બિંદુઓ A અને B માટે એવું ઓછામાં ઓછું એક બિંદુ C તો મળે જ જે રેખા AB પર ન હોય.

આ પૂર્વધારણાઓ યુક્લિડની પૂર્વધારણામાંથી **નહીં**, પરંતુ પૂર્વધારણા 5.1માંથી મળે છે.

4. જો AC = BC થાય તેવું બિંદુ C બિંદુઓ A અને Bની વચ્ચે હોય, તો સાબિત કરો કે $AC = \frac{1}{2}AB$ છે. આકૃતિ દોરીને તેને સ્પષ્ટ કરો.



AC = BC

∴ AC + AC = BC + AC

[બંને બાજુ સરખું ઉમેરતાં અને સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 2]

∴ 2AC = AB [BC + AC એ ABને બંધબેસતી આવે છે તથા સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 4]

∴ $\frac{1}{2}(2AC) = \frac{1}{2}AB$ [સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 7]

∴ $AC = \frac{1}{2}AB$

5. પ્રશ્ન 4માં બિંદુ C રેખાખંડ ABનું એક મધ્યબિંદુ કહેવાય છે. સાબિત કરો કે, દરેક રેખાખંડને એક અને માત્ર એક જ મધ્યબિંદુ હોય.

પ્રશ્ન 4માંથી આપણને રેખાખંડ ABના મધ્યબિંદુ Cના બે ગુણધર્મો મળે છે : (i) બિંદુ C એ રેખાખંડ AB પર A અને Bની વચ્ચે આવેલ છે. (ii) C એ A અને Bથી સમાન અંતરે છે.

શક્ય હોય તો ધારો કે, બિંદુ D તથા બિંદુ C ભિન્ન બિંદુઓ છે અને D એ રેખાખંડ ABનું મધ્યબિંદુ છે.

તો પ્રશ્ન **4** મુજબ $AD = \frac{1}{2}AB$ થાય. વળી, પ્રશ્ન **4**માં આપણે સાબિત કર્યું કે $AC = \frac{1}{2}AB$.

∴ AD = AC [સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 1]

હવે, D અને C બંને રેખાખંડ AB પર A અને Bની વચ્ચે છે તથા બંને બિંદુઓ Aથી સમાન અંતરે છે. આ પરથી સાબિત થાય છે કે D અને C સમાન બિંદુઓ છે, ભિન્ન નથી. આમ, દરેક રેખાખંડને એક અને માત્ર એક જ મધ્યબિંદુ હોય.

6. આપેલ આકૃતિમાં જો AC = BD હોય, તો સાબિત કરો કે AB = CD છે.



AC = BD

∴ AB + BC = BC + CD [AB + BC એ ACને બંધબેસતી છે અને BC + CD એ BDને બંધબેસતી છે.]

∴ AB + BC – BC = BC + CD – BC

[સરખામાંથી સરખું બાદ કરતાં અને સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 3]

∴ AB = CD

7. યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની યાદીમાં આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 5 એક સનાતન સત્ય કેમ માનવામાં આવે છે? (યાદ રાખો કે આ પ્રશ્ન પાંચમી પૂર્વધારણા સાથે સંબંધિત નથી.)

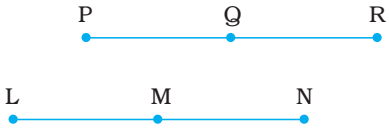
સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 5 દર્શાવે છે કે આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું હોય છે. શબ્દ ભાગનો અર્થ જ આખા કરતાં કાંઈક ઓછા માટે થાય છે. આ હકીકત કોઈ પણ વસ્તુ તથા દુનિયાના કોઈ પણ ભાગમાં સાચી છે. આથી તેને સનાતન સત્ય માનવામાં આવે છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. આપેલ આકૃતિમાં જો AB = CD હોય, તો સાબિત કરો કે AC = BD. આપની સાબિતીમાં વાપરેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્યો જણાવો.



2. આપેલ આકૃતિમાં PQ = LM, Q એ PRનું મધ્યબિંદુ તથા M એ LNનું મધ્યબિંદુ છે. સ્વયંસિદ્ધ સત્યોના ઉપયોગથી સાબિત કરો કે, PR = LN.



હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) જે વિધાન સાબિત કરવામાં આવે તેને ..... કહે છે.
(સ્વયંસિદ્ધ સત્ય, પૂર્વધારણા, પ્રમેય)

(2) શ્રીયંત્ર એ અંદરોઅંદર ગૂંથાયેલા નવ ..... ત્રિકોણનું સંયોજન છે. *(સમબાજુ, સમદ્વિબાજુ, સમકોણ)*

(3) પ્રાચીન ભારતમાં ભૌમિતિક રચનાઓ માટેનો મહત્ત્વપૂર્ણ ગ્રંથ ..... હતો. *(સૂલબાસૂત્ર, અથર્વવેદ, આયુર્વેદ)*

(4) રેખા એ ..... વગરની લંબાઈ છે.
(પહોળાઈ, સપાટી, બિંદુ)

(5) સિંધુખીણની સંસ્કૃતિમાં વપરાતી ઈંટોમાં લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈનો ગુણોત્તર ..... હતો.
(5 : 3 : 2, 4 : 4 : 2, 4 : 2 : 1)

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) ઘનને કેટલા પરિમાણ હોય છે?

(2) શ્રીયંત્રમાં કેટલા ઉપત્રિકોણ બને છે?

(3) સમતલને કેટલા પરિમાણ હોય છે?

(4) થેલ્સ કયા દેશનો વતની હતો?

(5) બિંદુને કેટલા પરિમાણ હોય છે?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) Elementsના પુસ્તક 1માં ..... વ્યાખ્યાઓ આપેલ છે.
A. 43 B. 9 C. 23 D. 13

(2) ઘન – સમતલ – રેખા – બિંદુ સુધીનાં ચરણોમાં દરેક ચરણમાં એક પરિમાણ ..... જાય છે.
A. વધતું B. ઘટતું C. ઉમેરાતું D. નવું આવતું

(3) સૌપ્રથમ જ્ઞાત સાબિતી ગણિતશાસ્ત્રી ..... આપી.
A. પાયથાગોરસે B. યુક્લિડે C. આર્યભટ્ટે D. થેલ્સે

(4) યુક્લિડે તેના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથ Elementsનું ..... પ્રકરણોમાં વિભાજન કર્યું હતું.
A. 9 B. 13 C. 21 D. 15

(5) પ્રાચીન ભારતમાં ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ..... વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો.
A. ચોરસ અને વર્તુળાકાર
B. ત્રિકોણ અને લંબચોરસ
C. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણ
D. ત્રિકોણ અને ચોરસ

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અસંખ્ય રેખાઓ મળે.

(2) સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

(3) યુક્લિડ એ થેલ્સનો ખ્યાતનામ વિદ્યાર્થી હતો.

(4) એક બિંદુમાંથી ફક્ત એક જ રેખા પસાર થાય.

(5) બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય ન હોય.

જવાબો

1. (1) પ્રમેય (2) સમદ્વિબાજુ (3) સૂલબાસૂત્ર (4) પહોળાઈ (5) 4 : 2 : 1

2. (1) ત્રણ (2) 43 (3) બે (4) ગ્રીસ (5) શૂન્ય

3. (1) C. 23 (2) B. ઘટતું (3) D. થેલ્સે (4) B. 13 (5) A. ચોરસ અને વર્તુળાકાર

4. (1) ખોટું (2) ખરું (3) ખોટું (4) ખોટું (5) ખરું

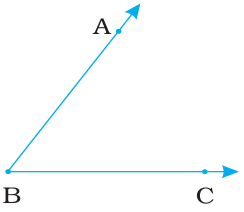
6 રેખાઓ અને ખૂણાઓ
(LINES AND ANGLES)

યાદ રાખો

* **રેખાખંડ :** બે અંત્યબિંદુઓવાળા રેખાના ભાગને રેખાખંડ કહેવાય છે.
* **કિરણ :** એક જ અંત્યબિંદુ ધરાવતા રેખાના ભાગને કિરણ કહેવાય છે.

નોંધ : રેખાખંડ ABને $\overline{AB}$ અને તેની લંબાઈને AB વડે દર્શાવાય છે. કિરણ ABને $\overrightarrow{AB}$ દ્વારા અને રેખા ABને $\overleftrightarrow{AB}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. છતાં પણ આપણે આ સંકેતોનો ઉપયોગ કરીશું નહિ અને રેખાખંડ AB, કિરણ AB, રેખાખંડ ABની લંબાઈ અને રેખા ABને તે જ સંકેત, એટલે કે AB વડે દર્શાવીશું. તમને તેનો અર્થ સંદર્ભથી સ્પષ્ટ થઈ જશે. ક્યારેક ક્યારેક રેખાઓને દર્શાવવા અંગ્રેજીના મૂળાક્ષરો l, m, n વગેરેનો ઉપયોગ કરીશું.

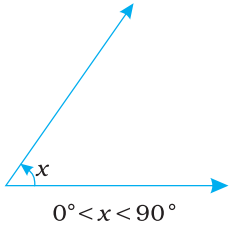
* **સમરેખ બિંદુઓ અને અસમરેખ બિંદુઓ :** જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલા હોય, તો તે બિંદુઓને સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે. અન્યથા તે અસમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે.
* **ખૂણો, બાજુઓ અને શિરોબિંદુ :** જ્યારે સામાન્ય અંત્યબિંદુવાળાં બે કિરણોનો ઉદ્‌ભવ થાય ત્યારે ખૂણો બને છે. અહીં ખૂણો બનાવતાં કિરણોને ખૂણાની બાજુઓ અથવા ભુજ કહેવામાં આવે છે અને સામાન્ય અંત્યબિંદુને ખૂણાનું શિરોબિંદુ કહેવાય છે.



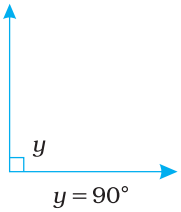
અહીં, સામાન્ય અંત્યબિંદુ Bવાળા બે ભિન્ન કિરણો BA અને BC ખૂણો ABC બનાવે છે. ખૂણા ABCને સંકેતમાં $\angle ABC$ લખાય છે. સંકેત $\angle ABC$ એ $\angle ABC$નું અંશ માપ પણ દર્શાવે છે. કિરણો BA અને BC એ $\angle ABC$ની બાજુઓ તથા બિંદુ B એ $\angle ABC$નું શિરોબિંદુ છે.

* **ખૂણાના પ્રકાર :**

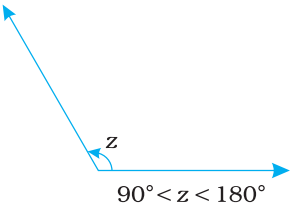
(1) લઘુકોણ (Acute angle) : જે ખૂણાનું માપ 0° અને 90°ની વચ્ચે હોય તે ખૂણાને લઘુકોણ કહેવાય છે.



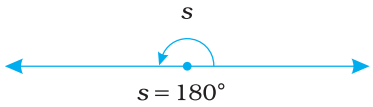
(2) કાટકોણ (Right angle) : જે ખૂણાનું માપ 90° હોય તે ખૂણાને કાટકોણ કહેવાય છે.



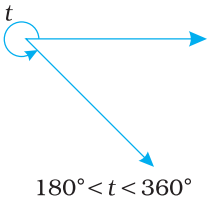
(3) ગુરુકોણ (Obtuse angle) : જે ખૂણાનું માપ 90° અને 180°ની વચ્ચે હોય તે ખૂણાને ગુરુકોણ કહેવાય છે.



(4) સરળકોણ (Straight angle) : જે ખૂણાનું માપ 180° હોય તે ખૂણાને સરળકોણ કહેવાય છે.



(5) વિપરીતકોણ (Reflex angle) : જે ખૂણાનું માપ 180° અને 360°ની વચ્ચે હોય તે ખૂણાને વિપરીતકોણ કહેવાય છે.

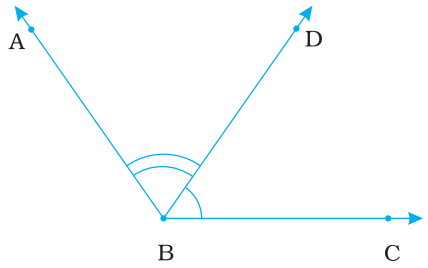


આમ, લઘુકોણનું માપ 0°થી 90°ની વચ્ચે હોય, કાટકોણનું માપ બરાબર 90° હોય, ગુરુકોણનું માપ 90°થી 180° ની વચ્ચે હોય, સરળકોણનું માપ બરાબર 180° હોય અને વિપરીતકોણનું માપ 180°થી 360°ની વચ્ચે હોય.

* **કોટિકોણ (Complementary angles) :** જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 90° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના કોટિકોણ કહે છે.
* **પૂરકકોણ (Supplementary angles) :** જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના પૂરકકોણ કહે છે.

જો $\angle A = 40°$, $\angle B = 50°$ અને $\angle C = 140°$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણ છે તથા $\angle A$ અને $\angle C$ પૂરકકોણ છે.

* **આસન્નકોણ (Adjacent angles) :** જો બે ખૂણાઓનું શિરોબિંદુ એક જ હોય, એક ભુજ સામાન્ય હોય અને સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ એ સામાન્ય ભુજની જુદી જુદી બાજુએ હોય તેવા બે ખૂણાઓને આસન્નકોણ કહેવાય.

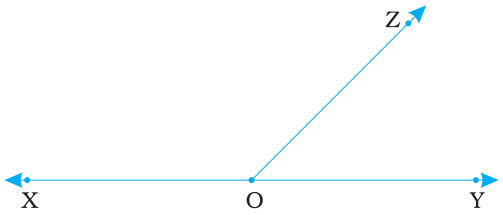


અહીં, $\angle ABD$ અને $\angle DBC$ આસન્નકોણ છે. કિરણ BD તેમનું સામાન્ય ભુજ છે અને B એ બંને ખૂણાનું શિરોબિંદુ છે. કિરણ BA અને કિરણ BC તેમના સામાન્ય ન હોય તેવાં ભુજ છે.

જો બે ખૂણા આસન્નકોણ હોય, તો તેમનાં માપનો સરવાળો તેઓના સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજથી બનતા ખૂણાના માપ જેટલો હોય.

અહીં, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$

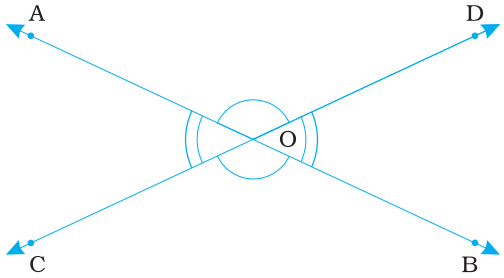
* **ખૂણાઓની રૈખિક જોડ (Pair of linear angles) :** જો બે આસન્નકોણના સામાન્ય ન હોય તેવાં ભુજ એક રેખા બનાવે, તો તેવા ખૂણાઓની જોડને ખૂણાઓની રૈખિક જોડ કહેવાય છે.



અહીં, આસન્નકોણ $\angle XOZ$ અને $\angle ZOY$માં તેમના સામાન્ય ન હોય તેવાં ભુજ OX અને OY રેખા XY બનાવે છે. આથી $\angle XOZ$ અને $\angle ZOY$ એ ખૂણાઓની રૈખિક જોડ રચે છે. તેમનો સરવાળો હંમેશાં $180°$ હોય.

અહીં, $\angle XOZ + \angle ZOY = 180°$

* **અભિકોણો (Vertically opposite angles) :** સામાન્ય શિરોબિંદુ ધરાવતા બે ખૂણાઓમાં જો એક ખૂણાનો દરેક ભુજ બીજા ખૂણાના ભુજ સાથે મળીને રેખા બનાવતો હોય, તો તેવા ખૂણાઓને અભિકોણો કહે છે.



અહીં, રેખાઓ AB અને CD બિંદુ Oમાં છેદે છે. આથી આપણને અભિકોણોની બે જોડ મળે છે. $\angle AOC$ અને $\angle BOD$ દ્વારા અભિકોણોની જોડ બને છે તેમજ $\angle AOD$ અને $\angle BOC$ દ્વારા પણ અભિકોણોની જોડ બને છે.

અભિકોણો હંમેશાં સમાન હોય છે.

અહીં, $\angle AOC = \angle BOD$ અને $\angle AOD = \angle BOC$.

* **પૂર્વધારણા 6.1 :** જે કિરણનું ઉદ્ભવબિંદુ રેખા પર હોય તેવા કિરણ અને રેખાથી બનતા બંને ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ થાય છે.

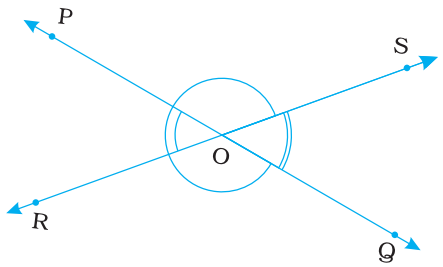
* **પૂર્વધારણા 6.2 :** જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો $180°$ હોય, તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે.

સ્પષ્ટ કારણોસર, ઉપરની બંને પૂર્વધારણાઓ એકત્રિત કરતાં તેમને સંયુક્ત રૂપે રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા કહે છે.

* **પ્રમેય 6.1 :** પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. આપેલ આકૃતિમાં રેખા PQ અને રેખા RS એકબીજાને બિંદુ Oમાં છેદે છે. જો $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ હોય, તો તમામ ખૂણાઓ શોધો.



$\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ખૂણાની રૈખિક જોડ)

પરંતુ, $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (પક્ષ)

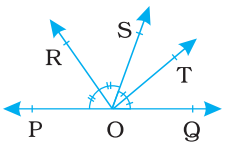
તેથી $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

તે જ રીતે, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

હવે, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (અભિકોણ)

અને $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (અભિકોણ)

2. આપેલ આકૃતિમાં કિરણ **OS** રેખા **POQ** પર છે. કિરણ **OR** અને કિરણ **OT** એ અનુક્રમે $\angle$ **POS** અને $\angle$ **SOQ**ના કોણદ્વિભાજક છે. જો $\angle$ **POS** = x, તો $\angle$ **ROT** શોધો.



કિરણ OS રેખા POQ પર છે.

તેથી $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

પરંતુ, $\angle POS = x$

તેથી $x + \angle SOQ = 180°$

માટે, $\angle SOQ = 180° - x$

હવે, કિરણ OR એ $\angle POS$નો દ્વિભાજક છે. તેથી

$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

તે જ રીતે $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

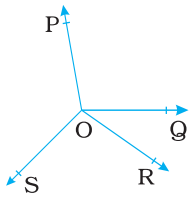
$= 90° - \frac{x}{2}$

હવે, $\angle$ **ROT** $= \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

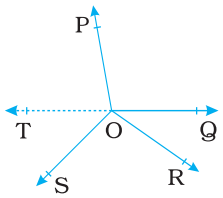
= 90°

3. આપેલ આકૃતિમાં **OP, OQ, OR** અને **OS** ચાર કિરણ છે, તો સાબિત કરો કે $\angle$ **POQ** + $\angle$ **QOR** + $\angle$ **SOR** + $\angle$ **POS** = **360°.**



કિરણ OQને પાછળના બિંદુ T તરફ લંબાવો.

તેથી TOQ રેખા છે. (જુઓ આકૃતિ)



હવે, કિરણ OP રેખા TOQ પર છે.

તેથી $\angle TOP + \angle POQ = 180°$

... ... (1)

તે જ રીતે કિરણ OS એ રેખા TOQ પર છે.

તેથી $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ ... ... (2)

પણ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

તેથી (2) પરથી $\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ મળે. ... ... (3)

હવે, (1) અને (3)નો સરવાળો કરતાં,

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ ... ... (4)

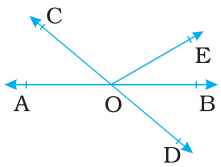
પરંતુ, $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

તેથી (4) પરથી

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ મળે.

સ્વાધ્યાય 6.1 | પાના નં. 70 – 71

1. આપેલ આકૃતિમાં રેખા **AB** અને **CD, O**માં છેદે છે. જો $\angle$ **AOC** + $\angle$ **BOE** = **70°** અને $\angle$ **BOD** = **40°**, તો $\angle$ **BOE** અને વિપરીત $\angle$ **COE** મેળવો.



રેખા AB અને CD, Oમાં છેદે છે.

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$ (અભિકોણો)

પરંતુ, $\angle BOD = 40°$ (પક્ષ)

$\therefore \angle AOC = 40°$

હવે, $\angle AOC + \angle BOE = 70°$

$\therefore 40° + \angle BOE = 70°$

$\therefore$ **$\angle$ BOE = 30°**

હવે, $\angle AOC + \angle BOE = 70°$

$\therefore \angle BOD + \angle BOE = 70°$ ($\because \angle AOC = \angle BOD$)

$\therefore \angle EOD = 70°$ (આસન્નકોણો)

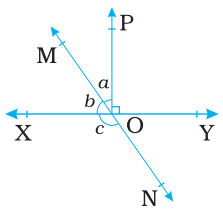
હવે, $\angle COD$ સરળકોણ છે.

$\therefore \angle COD = 180°$

વિપરીત $\angle$ **COE** $= \angle COD + \angle EOD$

$= 180° + 70° =$ **250°**

2. આપેલ આકૃતિમાં રેખા **XY** અને **MN, O**માં છેદે છે. જો $\angle$ **POY** = **90°** અને $a : b = 2 : 3$, તો c શોધો.



$\angle POX + \angle POY = 180°$ (રૈખિક જોડ)

$\therefore \angle POX + 90° = 180°$

$\therefore \angle POX = 90°$

$\angle XOM$ અને $\angle MOP$ આસન્નકોણ છે.

$\therefore \angle XOM + \angle MOP = \angle POX$

$\therefore b + a = 90°$

વળી, $a : b = 2 : 3$

ગુણોત્તરોનો સરવાળો $= 2 + 3 = 5$

$\therefore a = \frac{2}{5} \times 90° = 36°$

અને $b = \frac{3}{5} \times 90° = 54°$

$\angle XOM$ અને $\angle XON$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

$\therefore \angle XOM + \angle XON = 180°$

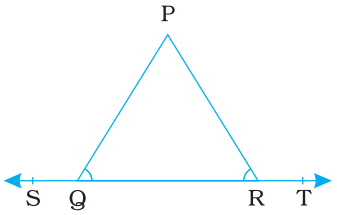
$\therefore b + c = 180°$

$\therefore 54° + c = 180°$

$\therefore c = 180° - 54°$

$\therefore$ **$c = 126°$**

3. આપેલ આકૃતિમાં $\angle PQR = \angle PRQ$, તો સાબિત કરો કે $\angle PQS = \angle PRT$.



કિરણ QPનું ઉદ્‌ભવબિંદુ રેખા ST પર છે.

$\therefore \angle PQS$ અને $\angle PQR$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

$\therefore \angle PQS + \angle PQR = 180°$

તે જ રીતે કિરણ RPનું ઉદ્‌ભવબિંદુ રેખા ST પર છે.

$\therefore \angle PRQ$ અને $\angle PRT$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

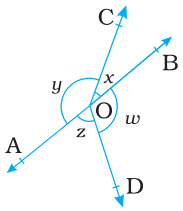
$\therefore \angle PRQ + \angle PRT = 180°$

$\therefore \angle PQR + \angle PRT = 180°$ (પક્ષ : $\angle PQR = \angle PRQ$)

આથી $\angle PQR + \angle PQS = \angle PQR + \angle PRT = 180°$

$\therefore \angle PQS = \angle PRT$

4. આપેલ આકૃતિમાં જો $x + y = w + z$ હોય, તો સાબિત કરો કે AOB રેખા છે.



આપણે જાણીએ છીએ કે એક બિંદુ પર બનતાં બધા જ ખૂણાઓનો સરવાળો 360° થાય છે.

$\therefore x + y + z + w = 360°$

$\therefore x + y + x + y = 360°$ (પક્ષ : $x + y = w + z$)

$\therefore 2(x + y) = 360°$

$\therefore x + y = 180°$

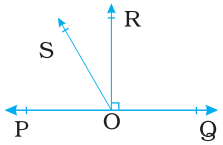
$\therefore \angle COB + \angle COA = 180°$

પરંતુ, $\angle COB$ અને $\angle COA$ આસન્નકોણ છે અને તેમનો સરવાળો 180° થાય છે.

માટે, પૂર્વધારણા 6.2 મુજબ AOB રેખા છે.

5. આપેલ આકૃતિમાં POQ રેખા છે. કિરણ OR રેખા PQને લંબ છે. કિરણ OP અને OR વચ્ચે અન્ય એક કિરણ OS આવેલ છે. સાબિત કરો કે,

$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$.



કિરણ OR રેખા PQને લંબ છે.

$\therefore \angle QOR = \angle POR = 90°$

$\angle QOR$ અને $\angle ROS$ આસન્નકોણ છે, જેમાં કિરણ OR સામાન્ય ભુજ છે.

$\therefore \angle QOS = \angle QOR + \angle ROS$

$\therefore \angle QOS = 90° + \angle ROS$ ... ... (1)

તે જ રીતે $\angle POS$ અને $\angle ROS$ આસન્નકોણ છે, જેમાં કિરણ OS સામાન્ય ભુજ છે.

$\therefore \angle POR = \angle POS + \angle ROS$

$\therefore 90° = \angle POS + \angle ROS$

$\therefore \angle POS = 90° - \angle ROS$ ... ... (2)

હવે, (1)માંથી (2)ની બાદબાકી કરતાં,

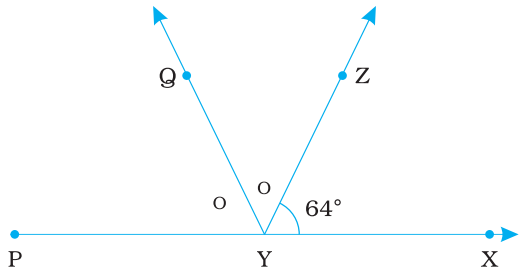
$\angle QOS - \angle POS = (90° + \angle ROS) - (90° - \angle ROS)$

$\therefore \angle QOS - \angle POS = 90° + \angle ROS - 90° + \angle ROS$

$\therefore \angle QOS - \angle POS = 2\angle ROS$

$\therefore \angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$

6. $\angle XYZ = 64°$ આપેલ છે અને XYને બિંદુ P સુધી લંબાવેલ છે. આપેલ સૂચના પરથી આકૃતિ દોરો. જો કિરણ YQ, $\angle ZYP$નો દ્વિભાજક હોય, તો $\angle XYQ$ અને વિપરીત $\angle QYP$નું માપ શોધો.



$\angle XYZ + \angle PYZ = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

$\therefore 64° + \angle PYZ = 180°$ (પક્ષ : $\angle XYZ = 64°$)

$\therefore \angle PYZ = 180° - 64°$

$\therefore \angle PYZ = 116°$

કિરણ YQ એ $\angle PYZ$નો દ્વિભાજક છે.

$\therefore \angle PYQ = \angle QYZ = \frac{1}{2}\angle PYZ = \frac{1}{2} \times 116° = 58°$

$\angle XYZ$ અને $\angle QYZ$ આસન્નકોણ છે.

$\therefore \angle XYQ = \angle XYZ + \angle QYZ$

$\therefore \angle XYQ = 64° + 58°$

$\therefore$ **$\angle XYQ = 122°$**

XYને P સુધી લંબાવેલ છે.

$\therefore \angle XYP$ સરળકોણ છે.

$\therefore \angle XYP = 180°$

હવે, વિપરીત $\angle QYP = \angle XYQ + \angle XYP$

$= 122° + 180°$

$=$ **$302°$**

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. $\angle A$ અને $\angle B$ પૂરકકોણો છે. જો $\angle A = x + 10°$ અને $\angle B = x - 10°$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ શોધો.
2. $\angle A$ અને $\angle B$ પૂરકકોણો છે. જો $\angle A : \angle B = 7 : 8$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ શોધો.
3. $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણો છે. જો $\angle A = x + 20°$ અને $\angle B = x - 10°$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ શોધો.
4. $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણો છે. જો $\angle A = \angle B + 20°$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ શોધો.
5. $\angle X$ અને $\angle Y$ પૂરકકોણો છે. જો $\angle X = 5\angle Y$ હોય, તો $\angle X$ અને $\angle Y$ શોધો.
6. $\angle P$ અને $\angle Q$ પૂરકકોણો છે. જો $\angle P = \angle Q - 40°$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle Q$ શોધો.

જવાબો : 1. $\angle A = 100°$, $\angle B = 80°$
2. $\angle A = 84°$, $\angle B = 96°$
3. $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$
4. $\angle A = 55°$, $\angle B = 35°$
5. $\angle X = 150°$, $\angle Y = 30°$
6. $\angle P = 70°$, $\angle Q = 110°$

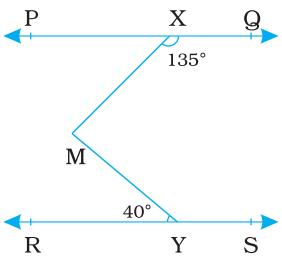
યાદ રાખો

એક જ રેખાને સમાંતર રેખાઓ :

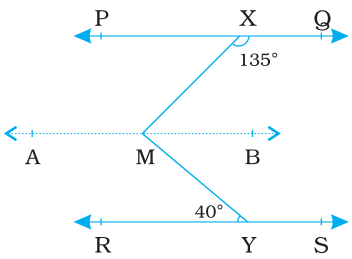
* **પ્રમેય 6.2 :** જે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

4. આપેલ આકૃતિમાં જો PQ ∥ RS, ∠ MXQ = 135° અને ∠ MYR = 40° છે, તો ∠ XMY મેળવો.



આકૃતિ 1



આકૃતિ 2

આકૃતિ 2માં બતાવ્યા મુજબ Mમાંથી પસાર થતી રેખા PQને સમાંતર એક રેખા AB દોરો.

AB ∥ PQ અને PQ ∥ RS છે.

આથી AB ∥ RS

હવે, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB ∥ PQ, છેદિકા XMની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

પરંતુ, $\angle QXM = 135°$

આથી $135° + \angle XMB = 180°$

આમ, $\angle XMB = 45°$ ... ... (1)

હવે, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB ∥ RS, યુગ્મકોણ)

આથી $\angle BMY = 40°$ ... ... (2)

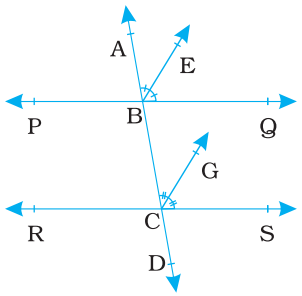
(1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$ મળે.

આથી **$\angle XMY = 85°$**

5. જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણના દ્વિભાજક પરસ્પર સમાંતર હોય, તો સાબિત કરો કે બંને રેખાઓ પણ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

નીચેની આકૃતિમાં એક છેદિકા AD એ રેખાઓ PQ અને RSને અનુક્રમે બિંદુઓ B અને Cમાં છેદે છે. કિરણ BE એ $\angle ABQ$નો દ્વિભાજક છે અને કિરણ CG એ $\angle BCS$નો દ્વિભાજક છે તથા BE ∥ CG છે.



આપેલ છે કે કિરણ BE એ ∠ABQનો દ્વિભાજક છે.

આથી $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ ... ... (1)

આ જ પ્રમાણે, કિરણ CG એ ∠BCSનો દ્વિભાજક છે.

આથી $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ ... ... (2)

પરંતુ, BE ∥ CG છે અને AD જ તેમની છેદિકા છે.

આથી ∠ABE = ∠BCG (અનુકોણ પૂર્વધારણા) ... ... (3)

(3)માં (1) અને (2)ની કિંમત મૂકતાં,

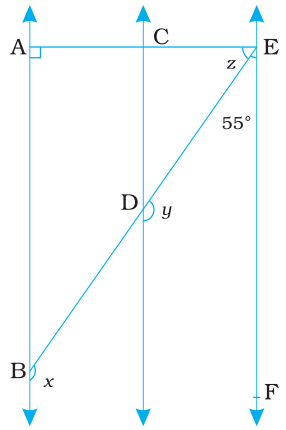
$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$

આથી ∠ABQ = ∠BCS

પરંતુ આ છેદિકા AD દ્વારા રેખાઓ PQ અને RS સાથે બનાવેલ અનુકોણ છે અને તે સમાન છે.

આથી PQ ∥ RS (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

6. આપેલ આકૃતિમાં AB ∥ CD અને CD ∥ EF અને EA ⊥ AB છે. જો ∠BEF = 55° હોય, તો *x*, *y* અને *z*નાં માપ શોધો.



$y + 55° = 180°$

(CD ∥ EF, છેદિકા EDની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

આથી $\boldsymbol{y} = 180° - 55°$

$= \mathbf{125°}$

વળી, $x = y$ (AB ∥ CD, અનુકોણ પૂર્વધારણા)

માટે $\boldsymbol{x = 125°}$

હવે, AB ∥ CD અને CD ∥ EF છે. તેથી AB ∥ EF થાય.

આથી ∠EAB + ∠FEA = 180°

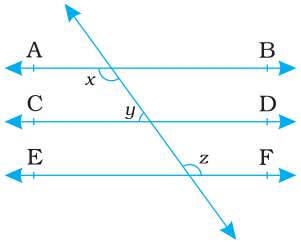
(છેદિકા EAની એક જ તરફના અંતઃકોણ)

∴ $90° + z + 55° = 180°$

∴ $\boldsymbol{z = 35°}$

સ્વાધ્યાય 6.2 | પાના નં. 73 – 74

1. આપેલ આકૃતિમાં જો AB ∥ CD, CD ∥ EF અને *y* : *z* = 3 : 7 છે, તો *x*નું માપ શોધો.



AB ∥ CD અને CD ∥ EF

∴ AB ∥ EF (પ્રમેય 6.2)

∴ $x = z$ (અંતઃયુગ્મકોણ)

હવે, AB ∥ CD

∴ $x + y = 180°$ (છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણો)

આમ, $x = z$ અને $x + y = 180°$

∴ $y + z = 180°$

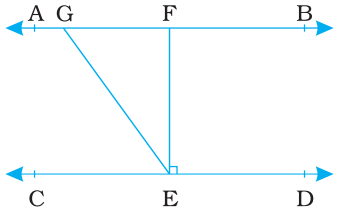
વળી, $y : z = 3 : 7$

ગુણોત્તરોનો સરવાળો = 3 + 7 = 10

∴ $z = \frac{7}{10} \times 180° = 126°$

હવે, $\boldsymbol{x = z = 126°}$

2. આપેલ આકૃતિમાં જો AB ∥ CD, EF ⊥ CD અને ∠GED = 126° છે, તો ∠AGE, ∠GEF અને ∠FGE મેળવો.



અહીં, AB ∥ CD અને GE છેદિકા છે.

∴ ∠AGE અને ∠GED સમાન અંતઃયુગ્મકોણ છે.

$\therefore \angle GED = \angle AGE$

$\therefore \angle$ **AGE = 126°** (પક્ષ : $\angle GED = 126°$)

હવે, $EF \perp CD$

$\therefore \angle FED = 90°$

$\angle GEF + \angle FED = \angle GED$ (આસન્નકોણ)

$\therefore \angle GEF + 90° = 126°$

$\therefore \angle$ **GEF = 36°**

હવે, $\angle AGE + \angle FGE = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

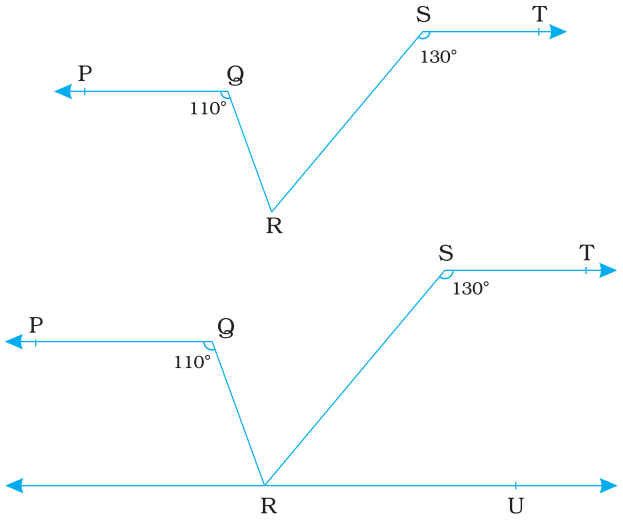
$\therefore 126° + \angle FGE = 180°$

$\therefore \angle FGE = 180° - 126°$

$\therefore \angle$ **FGE = 54°**

3. આપેલ આકૃતિમાં જો **PQ ∥ ST, ∠PQR = 110°** અને **∠RST = 130°**, તો **∠QRS** મેળવો.

[સૂચન : બિંદુ **R**માંથી પસાર થતી **ST**ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]



રચના : Rમાંથી પસાર થતી STને સમાંતર રેખા RU દોરો.

PQ ∥ ST અને ST ∥ RU

$\therefore$ PQ ∥ RU

ST ∥ RUની છેદિકા SR છે.

$\therefore \angle TSR + \angle SRU = 180°$

(છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણો)

$\therefore 130° + \angle SRU = 180°$

$\therefore \angle SRU = 50°$ ... ... (1)

PQ ∥ RUની છેદિકા QR છે.

$\therefore \angle PQR = \angle QRU$ (અંતઃયુગ્મકોણ)

$\therefore 110° = \angle QRU$

$\therefore \angle QRU = 110°$ ... ... (2)

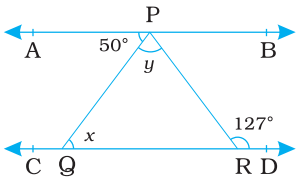
હવે, $\angle QRS$ અને $\angle SRU$ આસન્નકોણ છે.

$\therefore \angle QRS + \angle SRU = \angle QRU$

$\therefore \angle QRS + 50° = 110°$ [(1) અને (2) મુજબ]

$\therefore \angle$ **QRS = 60°**

4. આપેલ આકૃતિમાં જો **AB ∥ CD, ∠APQ = 50°** અને **∠PRD = 127°** છે, તો ***x*** અને ***y*** મેળવો.



અહીં, AB ∥ CD અને PQ તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle APQ = \angle PQR$ (અંતઃયુગ્મકોણ)

$\therefore 50° = x$

$\therefore$ ***x* = 50°**

વળી, AB ∥ CD અને PR તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle APR = \angle PRD$ (અંતઃયુગ્મકોણ)

$\therefore \angle APR = 127°$

$\angle APQ$ અને $\angle QPR$ આસન્નકોણ છે અને તેમનાં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ દ્વારા $\angle APR$ બને છે.

$\therefore \angle APR = \angle APQ + \angle QPR$

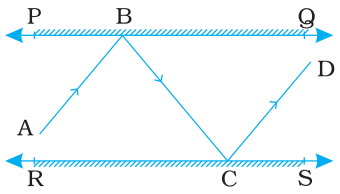
આથી $\angle APQ + \angle QPR = 127°$

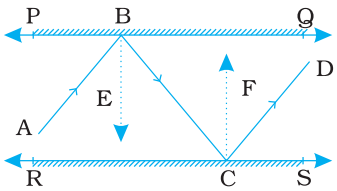
$\therefore 50° + y = 127°$

$\therefore y = 127° - 50°$

$\therefore$ ***y* = 77°**

5. આપેલ આકૃતિમાં **PQ** અને **RS** બે અરીસા છે. તે બંને એકબીજાને સમાંતર રાખેલા છે. એક આપાતકિરણ **AB** અરીસા **PQ**ને **B** પર અથડાય છે અને પરાવર્તિત કિરણ માર્ગ **BC** પર ચાલીને અરીસા **RS**ને **C** પર અથડાય છે તથા ફરી **CD** પર પરાવર્તિત થઈ જાય છે. સાબિત કરો કે, **AB ∥ CD** છે.





રચના : રેખા PQને લંબ કિરણ BE દોરો તથા રેખા RSને લંબ કિરણ CF દોરો.

આપણે જાણીએ છીએ કે સાદા અરીસા માટે આપાતકોણ = પરાવર્તનકોણ.

આથી બિંદુ B આગળ $\angle ABE = \angle EBC$ ... ... (1)

અને બિંદુ C આગળ $\angle BCF = \angle FCD$ ... ... (2)

હવે, PQ ∥ RS, BE ⊥ PQ અને CF ⊥ RS છે.

$\therefore$ BE ∥ CF

$\therefore \angle EBC = \angle BCF$ (અંત:યુગ્મકોણ) ... ... (3)

(1), (2) અને (3) પરથી,

$\angle ABE = \angle EBC = \angle BCF = \angle FCD$

$\therefore \angle ABE + \angle EBC = \angle BCF + \angle FCD$

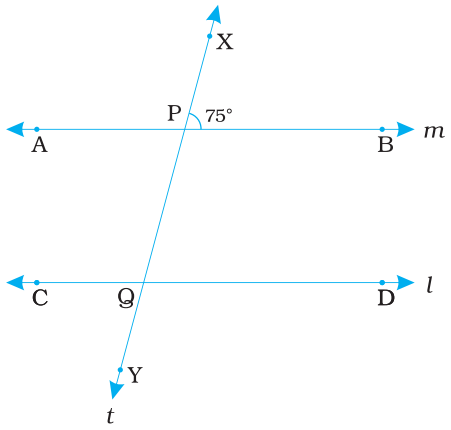
$\therefore \angle ABC = \angle BCD$ (આસન્નકોણ)

પરંતુ, $\angle ABC$ અને $\angle BCD$ એ રેખાઓ AB અને CDની છેદિકા BC દ્વારા બનતા અંત:યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

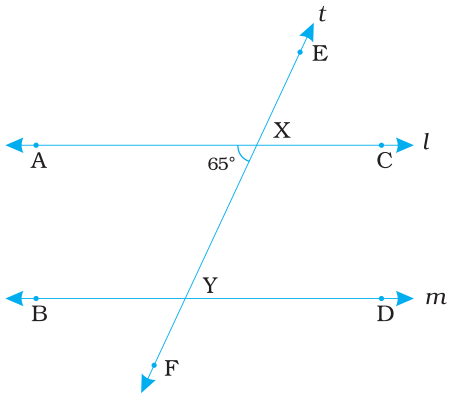
$\therefore$ AB ∥ CD

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

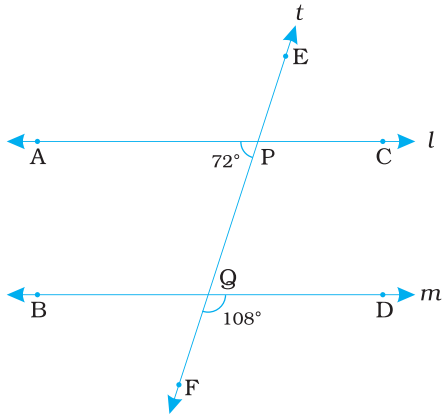
1. નીચેની આકૃતિમાં $l \parallel m$ છે તથા t તેમની છેદિકા છે. જો $\angle XPB = 75°$ હોય, તો $\angle PQD$, $\angle CQY$ અને $\angle APQ$ શોધો.



2. નીચેની આકૃતિમાં $l \parallel m$ની છેદિકા t છે. જો $\angle AXY = 65°$ હોય, તો $\angle BYF$, $\angle XYD$, $\angle EXC$ અને $\angle YXC$ શોધો.



3. નીચેની આકૃતિમાં l અને mની છેદિકા t છે. જો $\angle APQ = 72°$ અને $\angle DQF = 108°$ હોય, તો સાબિત કરો કે $l \parallel m$.



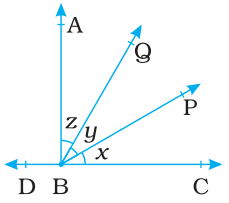
4. કિરણ AX એ $\angle BAC$નો દ્વિભાજક છે અને કિરણ AY એ $\angle XAC$નો દ્વિભાજક છે. જો $\angle BAY = 60°$, તો $\angle BAC$ શોધો.

5. કિરણ EX એ $\angle DEF$ નો દ્વિભાજક છે અને કિરણ EY એ $\angle DEX$નો દ્વિભાજક છે. જો $\angle DEX = 42°$ હોય, તો $\angle YEF$ અને $\angle DEF$ શોધો.

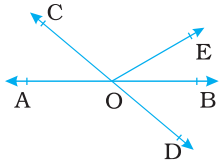
6. $\angle X$ અને $\angle Y$ પૂરકકોણ છે. જો $\angle X : \angle Y = 25 : 11$ હોય, તો $\angle X$ અને $\angle Y$ શોધો.

7. $\angle A$ અને $\angle B$ પૂરકકોણ છે. જો $4\angle A = 5\angle B$ હોય, તો $\angle A$ અને $\angle B$ શોધો.

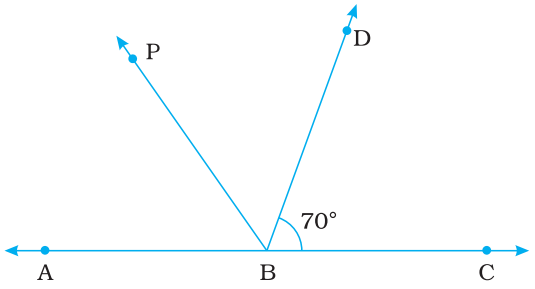
8. આપેલ આકૃતિમાં AB ⊥ CD છે. જો $x : y : z = 4 : 5 : 6$ હોય, તો x, y અને z માપ શોધો.



9. આપેલ આકૃતિમાં રેખા AB અને CD, Oમાં છેદે છે. જો $\angle AOC + \angle BOE = 100°$ અને $\angle BOD = 40°$ હોય, તો $\angle BOE$ અને વિપરીત $\angle COE$ શોધો.



10. આપેલ આકૃતિમાં $\angle DBC = 70°$ છે તથા કિરણ BP એ $\angle DBA$નો દ્વિભાજક છે. $\angle PBC$ તથા વિપરીત $\angle PBD$ શોધો.



11. $\angle P$ અને $\angle Q$ પૂરકકોણ છે. જો $\angle P = 11 \angle Q$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle Q$ શોધો.

12. $\angle P$ અને $\angle Q$ પૂરકકોણ છે. જો $\angle P = \angle Q + 35°$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle Q$ શોધો.

જવાબો : **1.** $\angle PQD = 75°$, $\angle CQY = 75°$, $\angle APQ = 75°$

2. $\angle BYF = 65°$, $\angle XYD = 65°$, $\angle EXC = 65°$, $\angle YXC = 115°$

4. $\angle BAC = 80°$

5. $\angle YEF = 63°$, $\angle DEF = 84°$

6. $\angle X = 125°$, $\angle Y = 55°$

7. $\angle A = 100°$, $\angle B = 80°$

8. $x = 24°$, $y = 30°$, $z = 36°$

9. $\angle BOE = 60°$, વિપરીત $\angle COE = 280°$

10. $\angle PBC = 125°$, વિપરીત $\angle PBD = 305°$

11. $\angle P = 165°$, $\angle Q = 15°$

12. $\angle P = 107\frac{1}{2}°$, $\angle Q = 72\frac{1}{2}°$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) રૈખિક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો ..... થાય.
(90°, 180°, 360°)

(2) ત્રિકોણના કુલ ..... બહિષ્કોણ મળે. *(બે, ત્રણ, છ)*

(3) જે બે ખૂણાઓનો સરવાળો 90° થાય તે ખૂણાઓને એકબીજાના ..... કહે છે.
(કોટિકોણ, પૂરકકોણ, અભિકોણ)

(4) વિપરીતકોણનું માપ .....ની વચ્ચે હોય.
(0° અને 90°, 90° અને 180°, 180° અને 360°)

(5) જે બે ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય તે ખૂણાઓને એકબીજાના ..... કહે છે.
(કોટિકોણ, પૂરકકોણ, અભિકોણ)

(6) જો $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણ હોય, તો $\angle A + \angle B =$ ..... . *(60°, 90°, 180°)*

(7) 112°ના માપના ખૂણાના પૂરકકોણના કોટિકોણનું માપ ..... થાય. *(68°, 56°, 22°)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) 85°ના માપના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ શોધો.

(2) 37°ના માપના ખૂણાના કોટિકોણનું માપ શોધો.

(3) જો રૈખિક જોડના બે ખૂણાનાં માપ 7 : 8ના પ્રમાણમાં હોય, તો તે પૈકી મોટા ખૂણાનું માપ શોધો.

(4) બે પૂરકકોણના માપ $x + 20°$ અને $2x + 10°$ હોય, તો તે પૈકી મોટા ખૂણાનું માપ શોધો.

(5) 38°ના ખૂણાના કોટિકોણના પૂરકકોણનું માપ શોધો.

(6) જો રૈખિક જોડના બે ખૂણાનાં માપ 17 : 28ના પ્રમાણમાં હોય, તો તે બંને ખૂણાનાં માપ શોધો.

(7) $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણ છે. જો તેઓનાં માપ અનુક્રમે $(2x - 5)°$ અને $(3x - 5)°$ હોય, તો xની કિંમત શોધો.

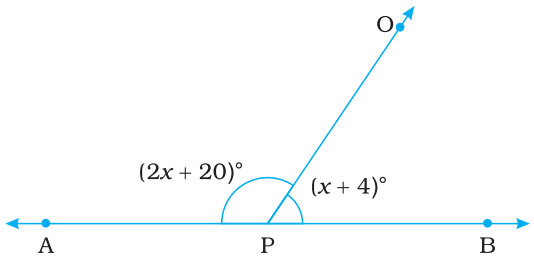
3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) 65°ના માપના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ ..... છે.
A. 35° B. 25° C. 115° D. 125°

(2) બે પૂરકકોણના માપનો તફાવત 38° છે, તો તેમાંના લઘુકોણનું માપ ..... છે.
A. 52° B. 71° C. 26° D. 61°

(3) $\angle A$ અને $\angle B$ પૂરકકોણ છે. જો $\angle A = (2x + 5)°$ અને $\angle B = (3x - 25)°$ હોય, તો $x =$ ..... .
A. 30 B. 40 C. 45 D. 60

(4) આકૃતિમાં આપેલ $\angle APO$ તથા $\angle BPO$ના માપ પરથી xની કિંમત ..... થાય.



A. 50 B. 51 C. 52 D. 53

(5) $\angle A$ લઘુકોણ છે. $\angle A$ના પૂરકકોણના માપ અને $\angle A$ના કોટિકોણના માપનો તફાવત ..... થાય.

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) 75°ના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ 15° છે.

(2) 40°ના ખૂણાના કોટિકોણના પૂરકકોણનું માપ 130° છે.

(3) 72°ના ખૂણાના કોટિકોણનું માપ 108° છે.

(4) 60°ના ખૂણાના અભિકોણનું માપ 30° થાય.

(5) $(4x + 5)°$ માપ ધરાવતા ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ $(175 - 4x)°$ થાય.

(6) $\angle A$ અને $\angle B$ કોટિકોણ છે તથા $\angle A : \angle B = 11 : 7$ હોય, તો $\angle A = 55°$.

(7) $\angle X$ અને $\angle Y$ પૂરકકોણ છે તથા $\angle X : \angle Y = 13 : 23$ હોય, તો $\angle X = 115°$.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. 62°ના ખૂણાના કોટિકોણનું માપ	a. 75°
2. 105°ના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ	b. 154°
3. 124°ના ખૂણાના પૂરકકોણના કોટિકોણનું માપ	c. 145°
4. 64°ના ખૂણાના કોટિકોણના પૂરકકોણનું માપ	d. 28°
5. 40°ના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ + 40°ના ખૂણાના કોટિકોણનું માપ	e. 90°
	f. 34°
6. 72°ના ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ – 72°ના ખૂણાના કોટિકોણનું માપ	g. 190°
	h. 230°

જવાબો

1. (1) 180° (2) છ (3) કોટિકોણ (4) 180° અને 360° (5) પૂરકકોણ (6) 90° (7) 22°

2. (1) 95° (2) 53° (3) 96° (4) 110° (5) 128° (6) 68° અને 112° (7) 20

3. (1) C. 115° (2) B. 71° (3) B. 40 (4) C. 52 (5) C. 90°

4. (1) ખોટું (2) ખરું (3) ખોટું (4) ખોટું (5) ખરું (6) ખરું (7) ખોટું

5. 1 → d, 2 → a, 3 → f, 4 → b, 5 → g, 6 → e.

7 ત્રિકોણ (TRIANGLES)

યાદ રાખો

* **ત્રિકોણ :** ત્રણ પરસ્પર છેદતી રેખાઓથી બનતી બંધ આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.
* ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ, ત્રણ ખૂણાઓ અને ત્રણ શિરોબિંદુઓ હોય છે. ત્રિકોણ ABCને ΔABC તરીકે દર્શાવાય છે. રેખાખંડ AB, BC અને CA એ ΔABCની બાજુઓ છે. $\angle A$, $\angle B$ અને $\angle C$ એ ΔABCના ખૂણા છે અને A, B અને C એ ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.
* **એકરૂપ આકૃતિઓ :** એકરૂપ અર્થાત્ બધી રીતે સમાન અથવા જેમના માપ અને આકાર બંને સરખાં હોય તેવી આકૃતિઓ. સમાન ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળ, સમાન બાજુઓવાળા બે ચોરસ તથા સમાન બાજુઓવાળા બે સમબાજુ ત્રિકોણ હંમેશાં એકરૂપ થાય.
* **ત્રિકોણની સંગતતા :** બે ત્રિકોણ ΔABC અને ΔXYZ વચ્ચે 6 એક-એક સંગતતા થઈ શકે. $ABC \leftrightarrow XYZ$, $ABC \leftrightarrow XZY$, $ABC \leftrightarrow YXZ$, $ABC \leftrightarrow YZX$, $ABC \leftrightarrow ZXY$, $ABC \leftrightarrow ZYX$. ΔABC અને ΔXYZની સંગતતા $ABC \leftrightarrow XYZ$ માટે અનુરૂપ અંગો સંગત થાય.

  શિરોબિંદુઓ : $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow Y$, $C \leftrightarrow Z$

  બાજુઓ : $AB \leftrightarrow XY$, $BC \leftrightarrow YZ$, $CA \leftrightarrow ZX$

  ખૂણાઓ : $\angle A \leftrightarrow \angle X$, $\angle B \leftrightarrow \angle Y$, $\angle C \leftrightarrow \angle Z$.
* **ત્રિકોણની એકરૂપતા :** બે ત્રિકોણોની આપેલ સંગતતા માટે જો અનુરૂપ અંગો સમાન હોય, તો તે સંગતતા માટે ત્રિકોણો એકરૂપ કહેવાય.

  ΔABC અને ΔXYZની સંગતતા $ABC \leftrightarrow XYZ$ માટે અનુરૂપ અંગો સમાન હોય, એટલે કે $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$, $\angle C = \angle Z$, $AB = XY$, $BC = YZ$ અને $CA = ZX$ હોય, તો સંગતતા $ABC \leftrightarrow XYZ$ એકરૂપતા છે તેમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ લખાય.

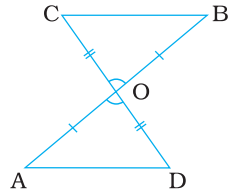
  જો ΔABC અને ΔXYZની સંગતતા $ABC \leftrightarrow XYZ$ એકરૂપતા હોય, તો જરૂરી નથી કે બાકીની પાંચ સંગતતા પણ એકરૂપતા હોય. આથી ત્રિકોણની એકરૂપતા દર્શાવતી વખતે સંગતતાનો ક્રમ ચોક્કસપણે જાળવવો.

ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો :

* **પૂર્વધારણા 7.1 (એકરૂપતાનો બાખૂબા નિયમ) :** જો બે ત્રિકોણ માટે એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થાય.
* **પ્રમેય 7.1 (ખૂબાખૂ) :** જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.
* **એકરૂપતાની ખૂખૂબા શરત :** જો ખૂણાની બે જોડ અને અનુરૂપ બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય. આને આપણે ખૂખૂબા એકરૂપતાની શરત કહી શકીએ.
* **CPCT :** ત્રિકોણના ત્રણ ચોક્કસ અંગો (જેમા ઓછામાં ઓછી એક બાજુ હોય) દ્વારા બે ત્રિકોણની એકરૂપતા સાબિત થાય. એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બાકીનાં અંગો પણ સમાન હોય. તેને ટૂંકમાં CPCT (Corresponding Parts of Congruent Triangles) લખાય છે. અર્થાત્ એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

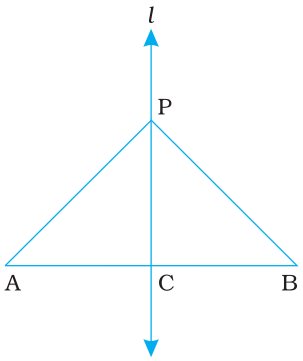
1. આપેલ આકૃતિમાં OA = OB અને OD = OC તો દર્શાવો કે,
(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ અને
(ii) AD ∥ BC.



(i) ΔAOD અને ΔBOCમાં
$OA = OB$ (પક્ષ)
$OD = OC$ (પક્ષ)
વળી, $\angle AOD$ અને $\angle BOC$ એ અભિકોણની જોડ બનાવે છે.
આથી $\angle AOD = \angle BOC$
આમ, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$
(એકરૂપતાની બાખૂબા શરત પરથી)

(ii) આથી $\angle OAD = \angle OBC$ (CPCT)
હવે, $\angle OAD$ અને $\angle OBC$ એ AD અને BCની છેદિકા ABને સંગત યુગ્મકોણની જોડ રચે છે અને તેઓ સમાન છે.
માટે, AD ∥ BC.

2. l રેખાખંડ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. જો બિંદુ P રેખા l પર હોય, તો બતાવો કે P એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલું છે.



રેખા $l \perp$ AB અને તે બિંદુ Cમાંથી પસાર થાય છે અને C એ ABનું મધ્યબિંદુ છે. (જુઓ આકૃતિ)

Δ PCA અને Δ PCBમાં AC = BC (C એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

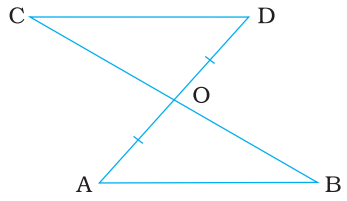
$\angle$ PCA = $\angle$ PCB = 90° (પક્ષ)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

આથી Δ PCA $\cong \Delta$ PCB (બાખૂબા શરત)

$\therefore$ PA = PB (CPCT)

3. રેખાખંડ AB એ બીજા રેખાખંડ CDને સમાંતર છે. O એ ADનું મધ્યબિંદુ છે. (જુઓ આકૃતિ)



સાબિત કરો કે,

(i) Δ AOB $\cong \Delta$ DOC

(ii) O એ BCનું પણ મધ્યબિંદુ થાય.

(i) Δ AOB અને Δ DOC માટે,

$\angle$ ABO = $\angle$ DCO

(AB $\parallel$ CDની છેદિકા BCથી બનતા યુગ્મકોણો)

$\angle$ AOB = $\angle$ DOC (અભિકોણો)

OA = OD (પક્ષ)

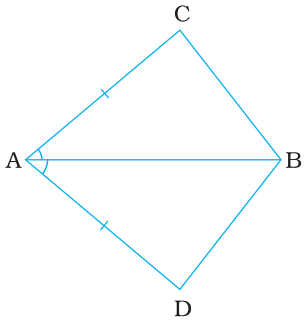
આથી Δ AOB $\cong \Delta$ DOC (ખૂખૂબા શરત)

(ii) OB = OC (CPCT)

આથી O એ BCનું પણ મધ્યબિંદુ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1 | પાના નં. 83 – 84

1. ચતુષ્કોણ ACBDમાં AC = AD અને AB એ $\angle$ Aનો દ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, Δ ABC $\cong \Delta$ ABD. BC અને BD વિશે તમે શું કહી શકો?



Δ ABC અને Δ ABDમાં

AC = AD (પક્ષ)

$\angle$ BAC = $\angle$ BAD (AB એ $\angle$ Aનો દ્વિભાજક છે.)

AB = AB (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta$ ABC $\cong \Delta$ ABD (બાખૂબા)

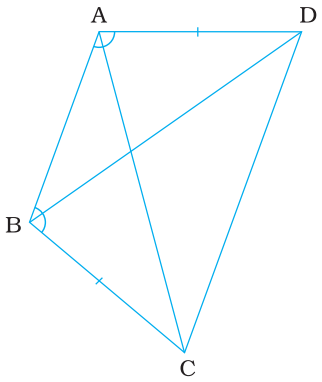
$\therefore$ BC = BD (CPCT)

આમ, BC અને BD સમાન છે.

2. જેમાં AD = BC અને $\angle$ DAB = $\angle$ CBA હોય તેવો ચતુષ્કોણ ABCD છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે,

(i) Δ ABD $\cong \Delta$ BAC (ii) BD = AC

(iii) $\angle$ ABD = $\angle$ BAC



Δ ABD અને Δ BACમાં

AD = BC (પક્ષ)

$\angle$ DAB = $\angle$ CBA (પક્ષ)

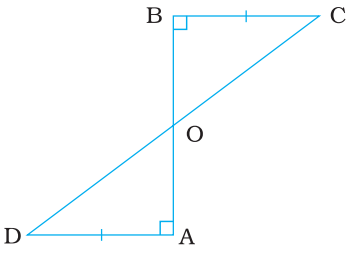
AB = BA (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta$ ABD $\cong \Delta$ BAC (બાખૂબા)

$\therefore$ BD = AC (CPCT)

$\therefore$ $\angle$ ABD = $\angle$ BAC (CPCT)

3. AD અને BC એ રેખાખંડ AB પરના સમાન લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, CD એ ABને દુભાગે છે.



AD અને BC એ રેખાખંડ AB પરના સમાન લંબ છે.

$\therefore$ AD = BC અને $\angle$OAD = $\angle$OBC = 90°

હવે, ΔADO અને ΔBCO

AD = BC

$\angle$OAD = $\angle$OBC

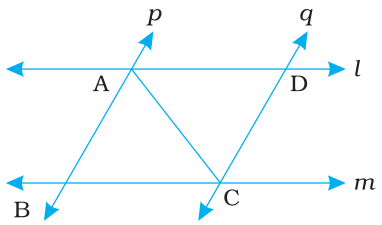
$\angle$AOD = $\angle$BOC (અભિકોણ)

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta BCO$ (ખૂખૂબા)

$\therefore$ OA = OB (CPCT)

AB અને CDનું છેદબિંદુ O છે અને OA = OB માટે, CD એ ABને દુભાગે છે.

4. *l* અને *m* બે સમાંતર રેખાઓ છે. બીજી બે સમાંતર રેખાઓની જોડ *p* અને *q*ની રેખાઓ તેમને છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.



$l \parallel m$ અને AC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore$ $\angle$BCA = $\angle$DAC (યુગ્મકોણ)

$p \parallel q$ અને AC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore$ $\angle$BAC = $\angle$DCA (યુગ્મકોણ)

હવે, ΔABC અને ΔCDAમાં

$\angle$BCA = $\angle$DAC

$\angle$BAC = $\angle$DCA

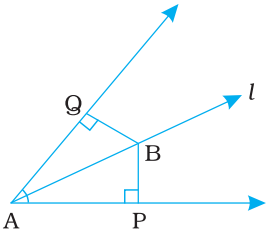
AC = AC (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (બાખૂબા)

5. કિરણ *l* એ $\angle$Aનો દ્વિભાજક છે અને B એ કિરણ *l* પરનું કોઈ બિંદુ છે. BP અને BQ એ Bમાંથી $\angle$Aની બાજુઓ પરના લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ અથવા B એ $\angle$Aની બાજુઓથી સમાન અંતરે આવેલ છે.



l એ $\angle$PAQનો દ્વિભાજક છે અને B એ *l* પરનું બિંદુ છે.

$\therefore$ $\angle$PAB = $\angle$QAB

BP અને BQ એ Bમાંથી AP અને AQ પરના લંબ છે.

$\therefore$ $\angle$BPA = $\angle$BQA = 90°

હવે, ΔAPB અને ΔAQBમાં

$\angle$PAB = $\angle$QAB

$\angle$BPA = $\angle$BQA

અને AB = AB (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta APB \cong \Delta AQB$ (ખૂખૂબા)

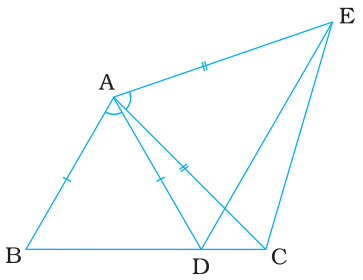
$\therefore$ BP = BQ (CPCT)

BP અને BQ એ $\angle$PQAના ભુજ AP અને AQ પરના લંબ છે.

$\therefore$ BP એ Bનું APથી અંતર છે અને BQ એ Bનું AQથી અંતર છે.

આમ, B એ $\angle$PAQની બાજુઓથી સમાન અંતરે છે.

6. આપેલ આકૃતિમાં AC = AE, AB = AD અને $\angle BAD = \angle EAC$; તો સાબિત કરો કે, BC = DE.



$\angle$BAD = $\angle$EAC

$\therefore$ $\angle$BAD + $\angle$DAC = $\angle$EAC + $\angle$DAC

$\therefore$ $\angle$BAC = $\angle$DAE (આસન્નકોણ)

હવે, ΔBAC અને ΔDAEમાં,

AC = AE (પક્ષ)

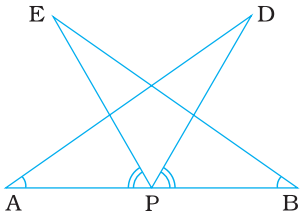
AB = AD (પક્ષ)

$\angle$BAC = $\angle$DAE

$\therefore \Delta BAC \cong \Delta DAE$ (બાખૂબા)

$\therefore$ BC = DE (CPCT)

7. AB એક રેખાખંડ છે અને P તેનું મધ્યબિંદુ છે અને જેથી $\angle BAD = \angle ABE$ અને $\angle EPA = \angle DPB$ થાય તેવાં બિંદુઓ D તથા E રેખા ABની એક બાજુએ આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે,



(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$ (ii) AD = BE

$\angle BAD = \angle ABE$

$\therefore \angle PAD = \angle PBE$ ($\because$ P એ AB પરનું બિંદુ છે.)

$\angle EPA = \angle DPB$

$\therefore \angle EPA + \angle EPD = \angle DPB + \angle EPD$

$\therefore \angle APD = \angle BPE$ (આસન્નકોણ)

P એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore AP = BP$

હવે, ΔDAP અને ΔEBPમાં,

$\angle PAD = \angle PBE$

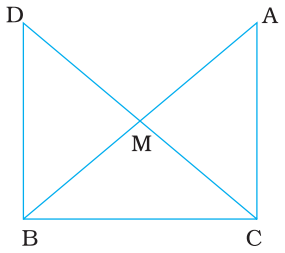
$\angle APD = \angle BPE$

$AP = BP$

$\therefore \Delta DAP \cong \Delta EBP$ (ખૂબાખૂ)

$\therefore AD = BE$ (CPCT)

8. કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં $\angle C$ કાટખૂણો છે. M એ કર્ણ ABનું મધ્યબિંદુ છે. DM = CM થાય તે રીતે Cને M સાથે જોડી D સુધી લંબાવો. બિંદુઓ D અને B જોડો. (જુઓ આકૃતિ)



સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ (ii) $\angle DBC$ કાટકોણ છે.

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ (iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

ΔAMC અને ΔBMDમાં

$AM = BM$ (M એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

$CM = DM$

$\angle AMC = \angle BMD$ (અભિકોણ)

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ [પરિણામ (i)]

$\therefore \angle MCA = \angle MDB$ (CPCT)

$\angle MCA$ અને $\angle MDB$ એ રેખાઓ AC અને BDની છેદિકા દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

$\therefore AC \parallel BD$

હવે, $\angle DBC$ અને $\angle ACB$ એ $AC \parallel BD$ની છેદિકા BC દ્વારા બનતા છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ છે.

$\therefore \angle DBC + \angle ACB = 180°$

$\therefore \angle DBC + 90° = 180°$ (પક્ષ : $\angle C = 90°$)

$\therefore \angle DBC = 90°$

એટલે કે, $\angle DBC$ કાટકોણ છે. [પરિણામ (ii)]

હવે, $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

$\therefore AC = BD$

ΔDBC અને ΔACBમાં

$BD = CA$

$\angle DBC = \angle ACB$ (કાટખૂણા)

$BC = CB$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ, $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ [પરિણામ (iii)]

$\therefore DC = AB$ (CPCT)

DM = CM અને D રેખાખંડ CD પર આવેલું બિંદુ છે.

$\therefore DC = 2CM$

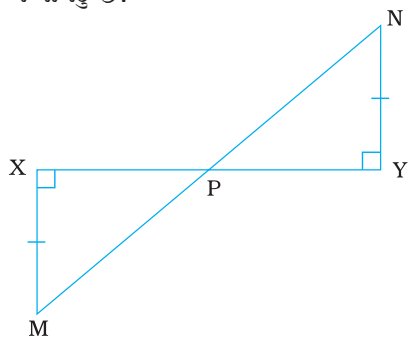
$\therefore AB = 2CM$

$\therefore \frac{1}{2} AB = CM$

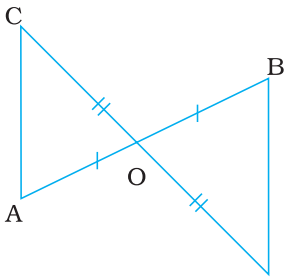
$\therefore CM = \frac{1}{2} AB$ [પરિણામ (iv)]

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. આપેલ આકૃતિમાં XM અને YN બંને રેખાખંડ XYને લંબ છે તથા XM = YN છે. સાબિત કરો કે, P એ XYનું તેમજ MNનું મધ્યબિંદુ છે.



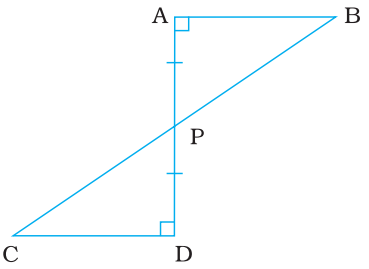
2. આપેલ આકૃતિમાં AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં એકબીજાને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે, AC = BD.



3. લંબચોરસ ABCDમાં E એ બાજુ BCનું મધ્યબિંદુ છે. સાબિત કરો કે, AE = DE.

4. સાબિત કરો કે, સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સમાન હોય છે.

5. આપેલ આકૃતિમાં AB અને DC એ રેખાખંડ ADને લંબ છે. BC એ ADને Pમાં છેદે છે અને P એ ADનું મધ્યબિંદુ છે. સાબિત કરો કે, (1) AB = CD (2) P એ BCનું મધ્યબિંદુ છે.



યાદ રાખો

ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મો :

* **પ્રમેય 7.2 :** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.
* **પ્રમેય 7.3 :** ત્રિકોણના સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.

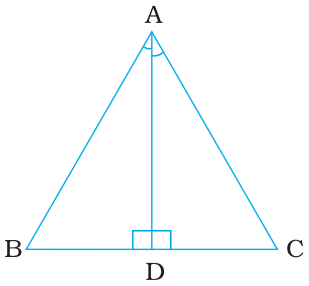
ઉપરના બંને પ્રમેય 7.2 અને 7.3 એકબીજાના પ્રતીપ છે.

* **સમબાજુ ત્રિકોણ :** પ્રમેય 7.2ની મદદથી સરળતાથી સાબિત થાય કે સમબાજુ ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણા સમાન હોય છે. તે દરેક ખૂણો 60°નો હોય. આથી સમબાજુ ત્રિકોણ એ સમકોણ ત્રિકોણ પણ છે. તે જ રીતે, પ્રમેય 7.3ની મદદથી સરળતાથી સાબિત થાય કે સમકોણ ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ સમાન હોય છે. આમ, દરેક સમકોણ ત્રિકોણ એ સમબાજુ ત્રિકોણ પણ છે.

નોંધ : સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં બે સમાન બાજુઓ સિવાયની ત્રીજી બાજુને સામાન્ય રીતે પાયો કહેવામાં આવે છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

4. Δ ABCમાં ∠ Aનો દ્વિભાજક AD એ BCને લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, AB = AC અને Δ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



Δ ABD અને Δ ACDમાં,

∠ BAD = ∠ CAD (પક્ષ)

AD = AD (સામાન્ય બાજુ)

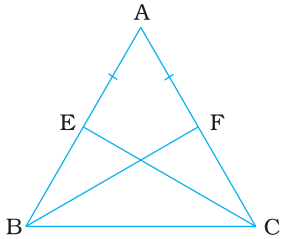
∠ ADB = ∠ ADC = 90° (પક્ષ)

આથી Δ ABD ≅ Δ ACD (ખૂબાખૂ શરત)

આમ, AB = AC (CPCT)

Δ ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. Δ ABCની સમાન બાજુઓ AB અને ACનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, BF = CE.



Δ ABF અને Δ ACEમાં,

AB = AC (પક્ષ)

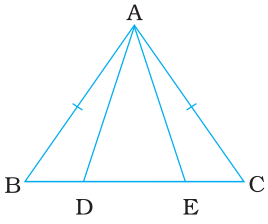
∠ A = ∠ A (સામાન્ય ખૂણો)

AF = AE (સમાન બાજુઓના અર્ધભાગ)

આથી Δ ABF ≅ Δ ACE (બાખૂબા શરત)

માટે, BF = CE (CPCT)

6. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABCમાં AB = AC છે, BE = CD થાય તેવાં બિંદુઓ D અને E એ BC પર છે. (જુઓ આકૃતિ) તો સાબિત કરો કે, AD = AE.



Δ ABD અને Δ ACEમાં,

AB = AC (પક્ષ) ... ... (1)

∠ B = ∠ C (સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા) ... ... (2)

વળી, BE = CD

માટે, BE – DE = CD – DE

આથી BD = CE ... ... (3)

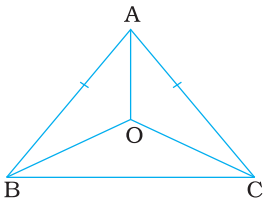
તેથી Δ ABD ≅ Δ ACE (પરિણામ (1), (2), (3) અને બાખૂબા શરત પરથી)

આ પરથી AD = AE (CPCT)

નોંધ : Δ ACD ≅ Δ ABE સાબિત કરીને પણ જોઈતું પરિણામ મેળવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 7.2 | પાના નં. 87 – 88

1. જેમાં **AB = AC** હોય તેવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ **ABC**માં $\angle B$ અને $\angle C$ના દ્વિભાજકો એકબીજાને **O**માં છેદે છે. **A** અને **O**ને જોડો. સાબિત કરો કે,



(i) OB = OC

(ii) AO એ $\angle A$નો દ્વિભાજક છે.

ΔABCમાં $AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ (પ્રમેય 7.2)

$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$ (BO એ $\angle ABC$નો તથા CO એ $\angle ACB$નો દ્વિભાજક છે.)

હવે, ΔOBCમાં $\angle OBC = \angle OCB$

$\therefore OB = OC$ (પ્રમેય 7.3)

તે જ રીતે,

$\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore \angle ABO = \angle ACO$

હવે, ΔABO અને ΔACOમાં,

$AB = AC$ (પક્ષ)

$\angle ABO = \angle ACO$

અને $OB = OC$

$\therefore \Delta ABO \cong \Delta ACO$ (બાખૂબા)

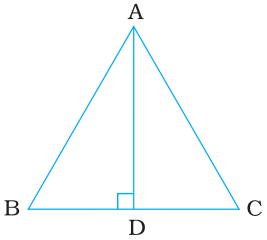
$\therefore \angle BAO = \angle CAO$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle BAO + \angle CAO = \angle BAC$ (આસન્નકોણ)

$\therefore \angle BAO = \angle CAO = \frac{1}{2}\angle BAC$

આમ, AO એ $\angle A$નો દ્વિભાજક છે.

2. Δ **ABC**માં **AD** એ **BC**નો લંબદ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, Δ **ABC** કે જેમાં **AB = AC** હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



ΔABCમાં AD એ BCનો લંબદ્વિભાજક છે.

$\therefore BD = CD$ અને $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

ΔADB અને ΔADCમાં,

$AD = AD$ (સામાન્ય બાજુ)

$\angle ADB = \angle ADC$ (કાટખૂણા)

અને $BD = CD$

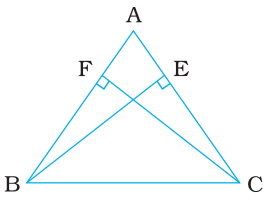
$\therefore \Delta ADB \cong \Delta ADC$ (બાખૂબા)

$\therefore AB = AC$ (CPCT)

હવે, ΔABCમાં $AB = AC$

$\therefore \Delta ABC$ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં $AB = AC$ છે.

3. Δ **ABC** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. **BE** અને **CF** એ સમાન બાજુઓ અનુક્રમે **AC** અને **AB** પર વેધ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, આ વેધ સમાન છે.



ΔABCમાં $AC = AB$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \angle FBC = \angle ECB$

હવે, ΔFBC અને ΔECBમાં,

$\angle FBC = \angle ECB$

$\angle BFC = \angle CEB$ (કાટખૂણા)

$BC = CB$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ ખૂખૂબા મુજબ, $\Delta FBC \cong \Delta ECB$

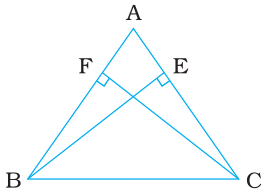
$\therefore CF = BE$ (CPCT)

આમ, ΔABCની સમાન બાજુઓ AC અને AB પરના વેધ BE અને CF સમાન છે.

4. Δ **ABC**ની બાજુઓ **AC** અને **AB** પરના બે વેધ **BE** અને **CF** સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે,

(i) Δ **ABE** $\cong \Delta$ **ACF**

(ii) AB = AC, અર્થાત્ **ABC** એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



ΔABE અને ΔACFમાં,

$\angle AEB = \angle AFC$ (કાટખૂણા)

$\angle A = \angle A$ (સામાન્ય ખૂણો)

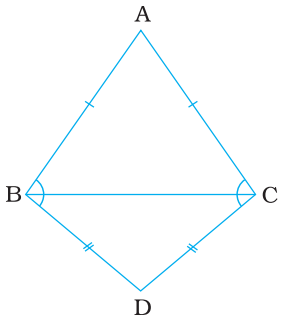
$BE = CF$ (પક્ષ)

$\therefore$ ખૂખૂબા મુજબ, $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

$\therefore AB = AC$ (CPCT)

આમ, ΔABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. ABC અને DBC એ સમાન પાયા BC પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, ∠ ABD = ∠ ACD.



∠ ABC અને ∠ DBC આસન્નકોણ છે.

∴ ∠ ABC + ∠ DBC = ∠ ABD ... ... (1)

∠ ACB અને ∠ DCB આસન્નકોણ છે.

∴ ∠ ACB + ∠ DCB = ∠ ACD ... ... (2)

Δ ABCમાં AB = AC

∴ ∠ ABC = ∠ ACB (પ્રમેય 7.2)

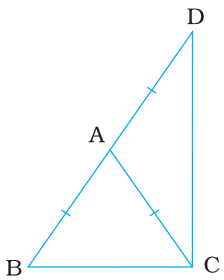
Δ DBCમાં DB = DC

∴ ∠ DBC = ∠ DCB (પ્રમેય 7.2)

આથી ∠ ABC + ∠ DBC = ∠ ACB + ∠ DCB

∴ ∠ ABD = ∠ ACD ((1) અને (2) પરથી)

6. જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC છે. AD = AB થાય તેવું બિંદુ D એ BA પર લો. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, ∠ BCD કાટખૂણો છે.



AB = AC અને AD = AB

∴ AC = AD

Δ ABCમાં AB = AC

∴ ∠ ACB = ∠ ABC (પ્રમેય 7.2) ... ... (1)

Δ ADCમાં AC = AD

∴ ∠ ACD = ∠ ADC (પ્રમેય 7.2) ... ... (2)

(1) અને (2)નો સરવાળો લેતાં,

∠ ACB + ∠ ACD = ∠ ABC + ∠ ADC

∴ ∠ BCD = ∠ DBC + ∠ BDC ... ... (3)

(આસન્નકોણ તથા A એ BD પર આવેલ બિંદુ છે.)

Δ BCDમાં,

∠ DBC + ∠ BDC + ∠ BCD = 180°

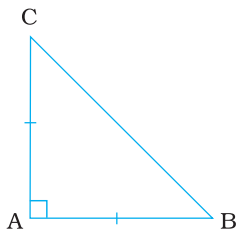
∴ ∠ BCD + ∠ BCD = 180° [(3) પરથી]

∴ 2∠ BCD = 180°

∴ ∠ BCD = 90°

આમ, ∠ BCD કાટખૂણો છે.

7. જેમાં ∠ A = 90° અને AB = AC હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC છે, તો ∠ B અને ∠ C શોધો.



Δ ABCમાં AB = AC

∴ ∠ C = ∠ B (પ્રમેય 7.2)

Δ ABCમાં

∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°

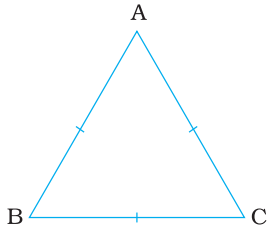
∴ 90° + ∠ B + ∠ B = 180°

(પક્ષ તથા ∠ C = ∠ B)

∴ 2∠ B = 90°

∴ **∠ B = 45°** ∴ **∠ C = 45°**

8. બતાવો કે, સમબાજુ ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાના માપ 60° હોય.



Δ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

∴ AB = BC = AC

Δ ABCમાં AB = BC

∴ ∠ C = ∠ A (પ્રમેય 7.2)

Δ ABCમાં AB = AC

∴ ∠ C = ∠ B (પ્રમેય 7.2)

આમ, ∠ A = ∠ B = ∠ C મળે.

હવે, Δ ABCમાં ∠ A + ∠ B + ∠ C = 180°

∴ $\angle A = \angle B = \angle C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

આમ, સમબાજુ ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાના માપ 60° હોય.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

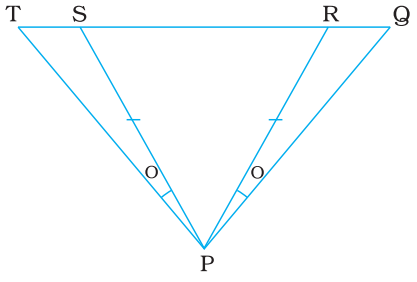
1. Δ ABCમાં AB = AC તથા ∠ Aનો દ્વિભાજક BCને Dમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે,

(1) Δ ADB ≅ Δ ADC (2) ∠ ABC = ∠ ACB

2. Δ ABCમાં ∠ B અને ∠ Cના કોણદ્વિભાજકો Iમાં મળે છે. Iમાંથી બાજુ BCને સમાંતર દોરેલ રેખા ABને Pમાં અને ACને Qમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, PQ = BP + CQ.

3. Δ ABCમાં AB = AC અને ∠ A = 36°. ∠ Cનો કોણ-દ્વિભાજક ABને Dમાં છેદે છે. જરૂરી ખૂણાઓનાં માપ શોધીને સાબિત કરો કે, AD = BC.

4. આપેલ આકૃતિમાં, જો PS = PR અને ∠ TPS = ∠ QPR હોય, તો સાબિત કરો કે PT = PQ.



યાદ રાખો

ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની કેટલીક વધુ શરતો :

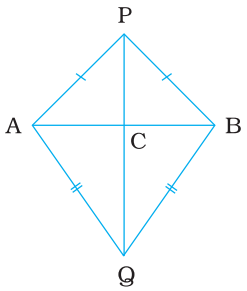
* **પ્રમેય 7.4 (એકરૂપતાની બાબાબા શરત) :** જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય.

* **પ્રમેય 7.5 (એકરૂપતાની કાકબા શરત) :** જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.

નોંધ : કાકબા એટલે કાટખૂણો – કર્ણ – બાજુને માટે વપરાય છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

7. **AB રેખાખંડ છે. P અને Q, ABની એકબીજાથી વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલ બિંદુઓ છે તથા બંને બિંદુઓ A અને Bથી સમાન અંતરે આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, રેખા PQ એ ABનો લંબદ્વિભાજક છે.**



PA = PB અને QA = QB

આપેલ છે. (પક્ષ)

અને PQ ⊥ AB તથા PQ એ ABને દુભાગે છે તે સાબિત કરવાનું છે.

ધારો કે, PQ એ ABને Cમાં છેદે છે.

Δ PAQ અને Δ PBQ,

AP = BP (પક્ષ)

AQ = BQ (પક્ષ)

PQ = PQ (સામાન્ય બાજુ)

આથી Δ PAQ ≅ Δ PBQ (બાબાબા શરત)

માટે, ∠ APQ = ∠ BPQ (CPCT)

હવે, Δ PAC અને Δ PBCમાં,

AP = BP (પક્ષ)

∠ APC = ∠ BPC (∠ APQ = ∠ BPQ સાબિત કર્યું)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

આથી Δ PAC ≅ Δ PBC (બાખૂબા શરત)

માટે, AC = BC (CPCT) ... ... (1)

અને ∠ ACP = ∠ BCP (CPCT)

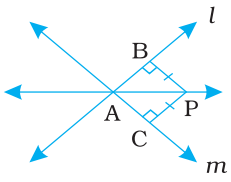
પરંતુ ∠ ACP + ∠ BCP = 180° (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી 2∠ ACP = 180°

અથવા ∠ ACP = 90° ... ... (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી સરળતાથી કહી શકાય કે PQ એ ABનો લંબદ્વિભાજક છે.

8. **પરસ્પર A બિંદુએ છેદતી બે રેખાઓ *l* અને *m*થી સમાન અંતરે બિંદુ P આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, રેખા AP તેમની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.**



રેખાઓ l અને m એકબીજાને A બિંદુએ છેદે છે.

PB = PC આપેલ છે.

વળી, PB ⊥ l, PC ⊥ m.

Δ PAB અને Δ PACમાં,

PB = PC (પક્ષ)

∠ PBA = ∠ PCA = 90° (પક્ષ)

PA = PA (સામાન્ય બાજુ)

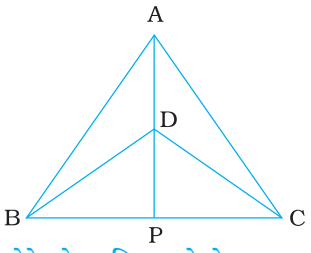
આથી Δ PAB ≅ Δ PAC (કાકબા શરત)

આથી ∠ PAB = ∠ PAC (CPCT)

નોંધ : આ પરિણામ સ્વાધ્યાય 7.1ના દાખલા નં. 5નું પ્રતીપ છે.

સ્વાધ્યાય 7.3 | પાના નં. 91 – 92

1. ΔABC અને ΔDBC સમાન પાયા **BC** પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે અને શિરોબિંદુઓ **A** અને **D** એ **BC**ની એક જ બાજુએ આવેલ છે (જુઓ આકૃતિ). જો **AD**ને લંબાવતા તે **BC**ને **P** બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે,



(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP એ $\angle A$ તથા $\angle D$ને દુભાગે છે.

(iv) AP એ **BC**નો લંબદ્વિભાજક છે.

સમદ્વિભુજ ΔABC અને ΔDBCમાં પાયો BC છે.

$\therefore AB = AC$ અને $DB = DC$

ΔABD અને ΔACDમાં,

$AB = AC$

$DB = DC$

અને $AD = AD$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાબાબા મુજબ, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ ... પરિણામ (i)

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ΔABP અને ΔACPમાં,

$AB = AC$

$\angle BAP = \angle CAP$ ($\because \angle BAD = \angle CAD$)

અને $AP = AP$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ, $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ ... પરિણામ (ii)

$\therefore BP = CP$ (CPCT)

ΔDBP અને ΔDCPમાં,

$DB = DC$

$BP = CP$

અને $DP = DP$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાબાબા મુજબ, $\Delta DBP \cong \Delta DCP$

$\Delta ABP \cong \Delta ACP$ પરથી,

$\therefore \angle BAP = \angle CAP$ (CPCT)

$\therefore$ AP એ $\angle A$ને દુભાગે છે.

$\Delta DBP \cong \Delta DCP$ પરથી,

$\angle BDP = \angle CDP$

$\therefore$ DP એ $\angle D$ને દુભાગે છે.

આમ, AP એ $\angle A$ તથા $\angle D$ને દુભાગે છે. ... પરિણામ (iii)

$\Delta ABP \cong \Delta ACP$

$\therefore BP = CP$ અને $\angle APB = \angle APC$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle APB + \angle APC = 180°$

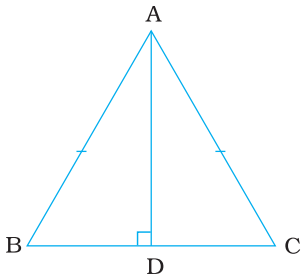
$\therefore \angle APB = \angle APC = \frac{180°}{2} = 90°$

આમ, $BP = CP$ અને $AP \perp BC$ મળે.

$\therefore$ AP એ BCનો લંબદ્વિભાજક છે. ... પરિણામ (iv)

2. જેમાં **AB = AC** હોય તેવા ΔABCનો વેધ **AD** છે, તો સાબિત કરો કે,

(i) AD એ **BC**ને દુભાગે છે. **(ii) AD** એ $\angle A$ને દુભાગે છે.



AD એ ΔABCનો વેધ છે.

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$

ΔADB અને ΔADCમાં,

કર્ણ AB = કર્ણ AC (પક્ષ)

$\angle ADB = \angle ADC$ (કાટખૂણો)

$AD = AD$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ કાકબા મુજબ, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

$\therefore BD = CD$ અને $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

હવે, $BD = CD$ અને D એ BCનું બિંદુ છે.

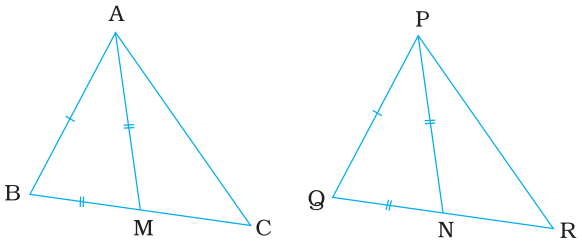
$\therefore$ AD એ BCને દુભાગે છે. ... ... પરિણામ (i)

વળી, $\angle BAD$ અને $\angle CAD$ આસન્નકોણ છે અને સમાન છે.

$\therefore$ AD એ $\angle A$ને દુભાગે છે. ... ... પરિણામ (ii)

3. ΔABCની બે બાજુઓ **AB** અને **BC** તથા મધ્યગા **AM** એ ΔPQRની અનુરૂપ બાજુઓ **PQ** અને **QR** તથા મધ્યગા **PN**ને સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ) તો સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



ΔABCમાં AM મધ્યગા છે.

$\therefore BM = CM = \frac{1}{2} BC$

ΔPQRમાં PN મધ્યગા છે.

$\therefore QN = RN = \frac{1}{2} QR$

હવે, $BC = QR$ (પક્ષ)

$\therefore \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}QR$

$\therefore BM = QN$

ΔABM અને ΔPQNમાં,

$AB = PQ$ (પક્ષ)

$AM = PN$ (પક્ષ)

$BM = QN$ (સાબિત કર્યું)

$\therefore$ બાબાબા મુજબ, $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

$\therefore \angle ABM = \angle PQN$ (CPCT)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR$

હવે, ΔABC અને ΔPQRમાં,

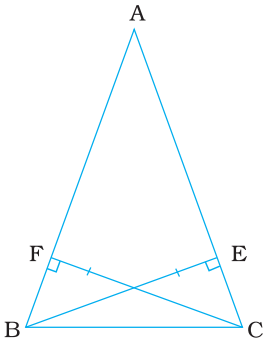
$AB = PQ$

$\angle ABC = \angle PQR$

$BC = QR$

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. **ત્રિકોણ ABCમાં BE અને CF બે સમાન વેધ છે, તો એકરૂપતા માટેની કાકબાની શરતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.**



ΔFBC અને ΔECBમાં

$CF = BE$ (પક્ષ)

$\angle CFB = \angle BEC$

$= 90°$ (પક્ષ)

$BC = CB$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ કાકબા મુજબ $\Delta FBC \cong \Delta ECB$

$\therefore \angle FBC = \angle ECB$ (CPCT)

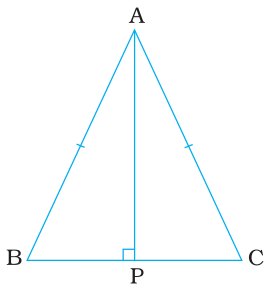
$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

હવે, ΔABCમાં $\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AC = AB$ (પ્રમેય 7.3)

આમ, ΔABCમાં $AB = AC$ હોવાથી ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. **જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC છે. $AP \perp BC$ દોરી $\angle B = \angle C$ દર્શાવો.**



ΔABCમાં AP લંબ છે.

$\therefore \angle APB = \angle APC$

$= 90°$

ΔAPB અને ΔAPCમાં,

$\angle APB = \angle APC = 90°$

$AB = AC$ (પક્ષ)

$AP = AP$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ કાકબા મુજબ, $\Delta APB \cong \Delta APC$

$\therefore \angle ABP = \angle ACP$ (CPCT)

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

આમ, ΔABCમાં $\angle B = \angle C$ થાય.

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. ΔABCમાં, D એ BCનું મધ્યબિંદુ છે. Dમાંથી AB પર વેધ DF દોરેલ છે તથા Dમાંથી AC પર વેધ DE દોરેલ છે. જો $DF = DE$ હોય, તો સાબિત કરો કે ΔABC એ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

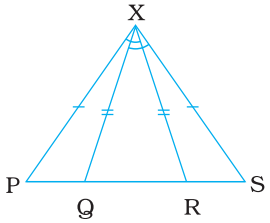
2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BD સમાન છે. $\angle ABC$નું માપ શોધો અને સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.

3. ΔABC અને ΔDBC એક જ પાયા BC પર આવેલાં સમદ્વિભુજ ત્રિકોણો છે. સાબિત કરો કે, રેખા AD એ BCને કાટખૂણે દુભાગે છે.

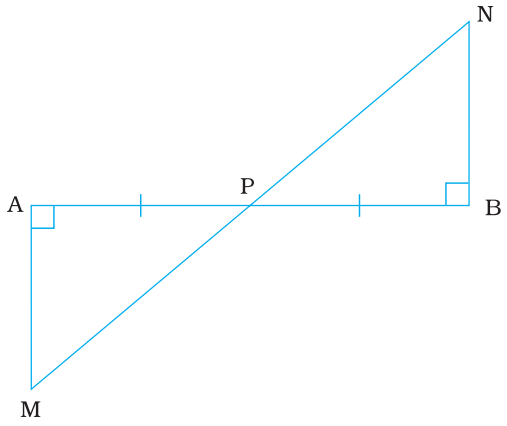
4. ΔABCમાં AD, BE અને CF વેધ છે. જો $AD = BE = CF$ હોય, તો સાબિત કરો કે ΔABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. ચતુષ્કોણ ABCDમાં $BA = BC$ અને $DA = DC$. સાબિત કરો કે, BD એ $\angle ABC$ તથા $\angle ADC$ને દુભાગે છે.

6. આપેલ આકૃતિમાં $XP = XS$, $XQ = XR$ અને $\angle PXR = \angle SXQ$. સાબિત કરો કે, $PQ = SR$.



7. આપેલ આકૃતિમાં ABનું મધ્યબિંદુ P છે તથા AM અને BN એ ABને લંબ છે. MN એ ABના મધ્યબિંદુ Pમાંથી પસાર થાય છે. સાબિત કરો કે, AM = BN તથા P એ MNનું મધ્યબિંદુ છે.



8. Δ ABCમાં ∠B અને ∠Cના દ્વિભાજકો P બિંદુમાં છેદે છે. Pમાંથી પસાર થતી અને BCને સમાંતર હોય તેવી રેખા AB તથા ACને અનુક્રમે X અને Yમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, XY = XB + YC.

9. શાળાના મેદાનમાં ત્રણ વિદ્યાર્થિનીઓ – આર્યા, ભવ્યા તથા ચાર્મી – તેઓના નિશ્ચિત સ્થાને ઊભી છે. દરેક વિદ્યાર્થિની પાસે રાખેલ ખીલામાં બે દોરી લગાવેલ છે, જે પૈકી દરેક દોરીનો બીજો છેડો બાકીની બે વિદ્યાર્થિનીઓ પાસે રાખેલ ખીલામાં જોડાયેલ છે. આર્યા અને ભવ્યા વચ્ચેની દોરીનું માપ 20 મી, ભવ્યા અને ચાર્મી વચ્ચેની દોરીનું માપ 30 મી તથા ચાર્મી અને આર્યા વચ્ચેની દોરીનું માપ 20 મી છે. જો ભવ્યા પાસેની બે દોરીઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 41.5° હોય, તો ચાર્મી પાસેની બે દોરીઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ તથા આર્યા પાસેની બે દોરીઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

જવાબ : 9. 41.5°, 97°

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમાન પરિમિતિવાળા બે ..... ત્રિકોણ હંમેશાં એકરૂપ થાય. *(સમબાજુ, સમદ્વિબાજુ, વિષમબાજુ)*

(2) જો Δ PQR ≅ Δ YXZ હોય, તો ∠PRQ = ∠ ..... . *(XYZ, YZX, ZXY)*

(3) Δ ABC ≅ Δ PQR છે. જો ∠A = 55° અને ∠Q = 75° હોય, તો ∠C = ... *(55°, 75°, 50°)*

(4) Δ PQR ≅ Δ XYZ છે. જો PQ = QR = 3.8 સેમી અને PR = 5.5 સેમી હોય, તો YZ = ... સેમી. *(5.5, 3.8, 7.6)*

(5) Δ ABCમાં ∠B = ∠C છે. જો AB = 5.2 સેમી અને BC = 8.3 સેમી હોય, તો Δ ABCની પરિમિતિ = ... સેમી. *(13.5, 21.8, 18.7)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) Δ ABC ≅ Δ RPQ છે. જો ∠A = 50° અને ∠B = 70° હોય, તો ∠Q શોધો.

(2) Δ ABC અને Δ XYZમાં AB = XZ, BC = ZY અને ∠B = ∠Z હોય, તો Δ ABC અને Δ XYZની એકરૂપતા સંકેતમાં દર્શાવો.

(3) Δ PQR ≅ Δ XYZ છે. જો ∠P = 80° અને ∠Q = 70° હોય, તો ∠Y + ∠Z શોધો.

(4) Δ ABC ≅ Δ PQR છે. જો AB = 5.2 સેમી, BC = 3.8 સેમી અને PR = 4.5 સેમી હોય, તો Δ ABCની પરિમિતિ શોધો.

(5) જો બે સમબાજુ ત્રિકોણોની પરિમિતિ સમાન હોય, તો તેઓ વચ્ચેની કેટલી સંગતતા એકરૂપતા થાય?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) Δ ABC અને Δ PQRમાં AB = QR, BC = PQ અને AC = PR હોય, તો Δ ABC ≅ Δ ..... .
A. PQR B. RQP C. PRQ D. QPR

(2) Δ ABC અને Δ XYZમાં AB = YZ, BC = ZX અને ∠B = ∠Z હોય, તો Δ ABC ≅ Δ ..... .
A. XYZ B. XZY C. YXZ D. YZX

(3) Δ PQRમાં PQ = PR તથા ∠Q = 50° હોય, તો ∠P = ...
A. 50° B. 100° C. 80° D. 40°

(4) Δ ABCમાં ∠B = ∠C, BC = 5.2 સેમી અને AB = 4.8 સેમી હોય, તો
Δ ABCની પરિમિતિ = ... સેમી.
A. 14.8 B. 15.2 C. 15.6 D. 14.4

(5) Δ ABC અને Δ PQRમાં $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR} = 1$ હોય, તો Δ ABC ≅ Δ .....
A. PQR B. RPQ C. RQP D. QPR

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ગુરુકોણ ત્રિકોણ હોઈ શકે.

(2) Δ ABCમાં $\angle A = 30°$ અને $\angle B = 60°$ હોય, તો $AC = 2BC$ થાય.

(3) Δ ABCમાં $\angle B = \angle C$ હોય, તો $AB = BC$ થાય.

(4) Δ ABC અને Δ PQRમાં $\frac{AB}{PR} = \frac{BC}{PQ} = \frac{CA}{QR} = 1$ હોય, તો $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ થાય.

(5) Δ ABCમાં $AB = AC$ છે. જો $\angle B = 50°$ હોય, તો $\angle A = 50°$ થાય.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. Δ ABC અને Δ PQRમાં $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{RQ} = \frac{AC}{PR} = 1$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	a. Δ PRQ
2. Δ ABC અને Δ PQRમાં $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle R$ અને $AB = PR$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	b. Δ RQP
3. Δ ABC અને Δ PQRમાં $\frac{AB}{RP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{RQ} = 1$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	c. Δ QRP
4. Δ ABC અને Δ PQRમાં $AB = RQ$, $\angle B = \angle Q$ અને $BC = QP$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	d. Δ QPR
5. Δ ABC અને Δ PQRમાં $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{QR} = 1$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	e. Δ RPQ
6. Δ ABC અને Δ PQRમાં $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ અને $AB = QR$ હોય, તો $\Delta ABC \cong$	f. Δ PQR

જવાબો

1. (1) સમબાજુ (2) YZX (3) 50° (4) 3.8 (5) 18.7

2. (1) 60° (2) $\Delta ABC \cong \Delta XZY$ (3) 100° (4) 13.5 સેમી (5) છ સંગતતા

3. (1) B. RQP (2) D. YZX (3) C. 80° (4) A. 14.8 (5) C. RQP

4. (1) ખરું (2) ખોટું (3) ખોટું (4) ખોટું (5) ખોટું

5. 1 → f, 2 → a, 3 → e, 4 → b, 5 → d, 6 → c.

8 ચતુષ્કોણ (QUADRILATERALS)

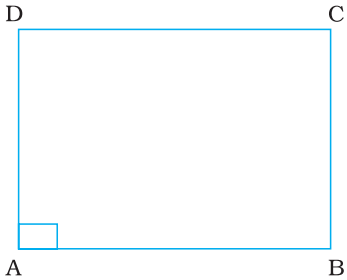
યાદ રાખો

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો :

* **પ્રમેય 8.1 :** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.
* **પ્રમેય 8.2 :** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.
* **પ્રમેય 8.3 :** જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* **પ્રમેય 8.4 :** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા સમાન છે.
* **પ્રમેય 8.5 :** જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* **પ્રમેય 8.6 :** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.
* **પ્રમેય 8.7 :** જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* જો ચતુષ્કોણમાં (1) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય અથવા (2) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન હોય અથવા (3) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે અથવા (4) સામસામેની બાજુઓની કોઈ પણ એક જોડ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* **લંબચોરસ :** લંબચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે અને સમાન છે.
  ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સાચું છે.
* **સમબાજુ ચતુષ્કોણ :** સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે.
  ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સાચું છે.
* **ચોરસ :** ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને સમાન છે.
  ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સાચું છે.
* **પતંગાકાર :** પતંગાકારનો એક વિકર્ણ બીજા વિકર્ણના લંબદ્વિભાજકનો ભાગ છે.
  ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતીપ પણ સાચું છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. બતાવો કે, લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



ધારો કે, $\angle A = 90°$ હોય તેવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD છે.

AD ∥ BC છે અને AB તેની એક છેદિકા છે. (જુઓ આકૃતિ)

આથી $\angle A + \angle B = 180°$

(છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃકોણો)

પરંતુ, $\angle A = 90°$

આથી $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

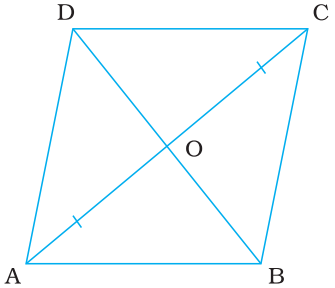
વળી, $\angle C = \angle A$ અને $\angle D = \angle B$

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓ)

આથી $\angle C = 90°$ અને $\angle D = 90°$

માટે, લંબચોરસનો પ્રત્યેક ખૂણો કાટખૂણો છે.

2. સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ છે, તેમ બતાવો.



ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ લો. (જુઓ આકૃતિ)

AB = BC = CD = DA

(સમબાજુ ચતુષ્કોણની બધી જ બાજુઓ સમાન હોય.)

હવે, ΔAOD અને ΔCODમાં,

$OA = OC$

(સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.)

$OD = OD$ (સામાન્ય બાજુ)

$AD = CD$

માટે, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (બાબાબા એકરૂપતાનો નિયમ)

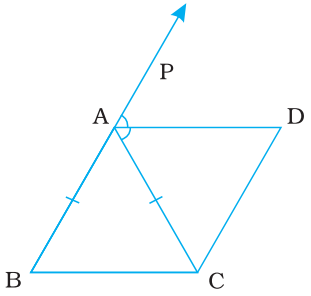
માટે, $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી $2\angle AOD = 180°$ અથવા $\angle AOD = 90°$

આથી સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ છે.

3. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ΔABCમાં $AB = AC$ છે. AD બહિષ્કોણ PACનો દ્વિભાજક છે અને $CD \parallel AB$. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, (i) $\angle DAC = \angle BCA$ અને (ii) $ABCD$ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



(i) સમદ્વિભુજ ΔABCમાં $AB = AC$ છે. (પક્ષ)

માટે, $\angle ABC = \angle ACB$ (સમાન બાજુની સામેના ખૂણા)

વળી, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$

(ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ)

$\therefore \angle PAC = 2\angle ACB$ ... ... (1)

હવે, AD એ $\angle PAC$નો દ્વિભાજક છે.

માટે, $\angle PAC = 2\angle DAC$ ... ... (2)

માટે, $2\angle DAC = 2\angle ACB$ ((1) અને (2) પરથી)

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$ $\therefore \angle DAC = \angle BCA$

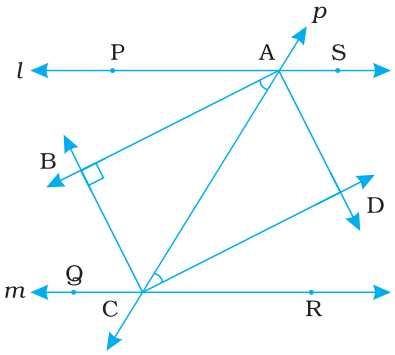
(ii) રેખાખંડ BC અને ADની છેદિકા ACના છેદવાથી બનતી યુગ્મકોણની જોડના ખૂણા $\angle DAC$ અને $\angle BCA$ સમાન છે.

આથી $BC \parallel AD$

વળી, $BA \parallel CD$

હવે, ચતુષ્કોણ $ABCD$ની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. આથી $ABCD$ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

4. બે સમાંતર રેખાઓ l અને mની છેદિકા રેખા p છે. (જુઓ આકૃતિ) બતાવો કે, અંતઃકોણોના દુભાજકથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.



$PS \parallel QR$ છે અને છેદિકા p તેમને અનુક્રમે A અને Cમાં છેદે છે.

$\angle PAC$ અને $\angle ACQ$ના દુભાજકો Bમાં છેદે છે અને $\angle ACR$ અને $\angle SAC$ના દુભાજકો Dમાં છેદે છે.

હવે, $\angle PAC = \angle ACR$

($l \parallel m$ની છેદિકા pથી બનતા યુગ્મકોણ)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

અર્થાત્ $\angle BAC = \angle ACD$

$\angle BAC$ અને $\angle ACD$ રેખાઓ AB અને DCની છેદિકા ACથી બનતા યુગ્મકોણોની જોડ છે અને વળી તેઓ સમાન છે.

$AB \parallel DC$

તે જ પ્રમાણે, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ અને $\angle CAD$ લેતાં)

માટે, ચતુષ્કોણ $ABCD$ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

વળી, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

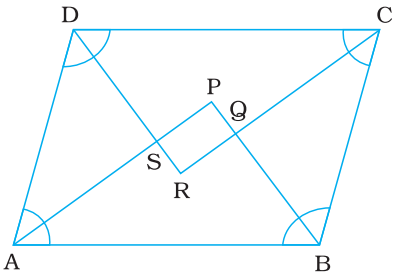
$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 90°$

$\therefore \angle BAD = 90°$

આથી $ABCD$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા તેનો એક ખૂણો $90°$ છે.

માટે, $ABCD$ લંબચોરસ છે.

5. બતાવો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના દુભાજકો લંબચોરસ રચે છે.



ધારો કે P, Q, R અને S એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ના ખૂણાઓ $\angle A$ અને $\angle B$, $\angle B$ અને $\angle C$, $\angle C$ અને $\angle D$ તથા $\angle D$ અને $\angle A$ના દુભાજકોનાં છેદબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ)

∠Dનો દુભાજક DS અને ∠Aનો દુભાજક AS હોવાથી,

$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180°$ (∠A અને ∠D છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણો છે.)

$= 90°$

વળી, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$

(ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

માટે, $90° + \angle DSA = 180°$

$\therefore \angle DSA = 90°$

આથી $\angle PSR = 90°$ (∠DSAનો અભિકોણ)

તે જ પ્રમાણે $\angle APB = 90°$ અને $\angle SPQ = 90°$

તથા તે જ પ્રમાણે, $\angle PQR = 90°$ અને $\angle SRQ = 90°$

∴ ચતુષ્કોણ PQRSના બધા જ ખૂણાઓ કાટખૂણા છે.

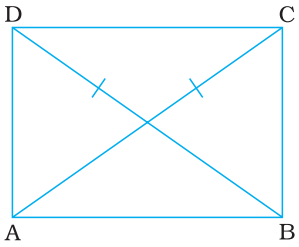
$\angle PSR = \angle PQR = 90°$ અને $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$.

આથી સામસામેના ખૂણાઓની બંને જોડ સમાન છે.

માટે, PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક ખૂણો (ખરેખર તો બધા જ ખૂણાઓ) 90°નો છે અને તેથી PQRS લંબચોરસ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1 | પાના નં. 99

1. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો દર્શાવો કે તે લંબચોરસ છે.



સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં વિકર્ણો સમાન છે, એટલે કે AC = BD.

Δ DAB અને Δ CBAમાં,

DA = CB (પ્રમેય 8.2)

AB = BA (સામાન્ય બાજુ)

DB = CA (પક્ષ)

∴ બાબાબા મુજબ, Δ DAB ≅ Δ CBA

∴ ∠DAB = ∠CBA (CPCT)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AD ∥ BC અને AB તેમની છેદિકા છે.

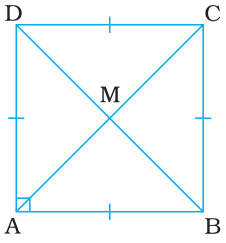
∴ ∠DAB + ∠CBA = 180° (છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ)

આમ, ∠DAB અને ∠CBA પૂરકકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

∴ ∠DAB = ∠CBA = 90°

એટલે કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં ∠A અને ∠B બંને કાટખૂણા છે. માટે, સમાન વિકર્ણો ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.

2. સાબિત કરો કે, ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.



ABCD એ આપેલ ચોરસ છે, જેના વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને Mમાં છેદે છે.

પ્રત્યેક ચોરસ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ છે જ.

∴ AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે. ... ... (1)

Δ DAB અને Δ CBAમાં,

DA = CB (ચોરસની બાજુઓ)

∠DAB = ∠CBA (ચોરસના ખૂણા કાટખૂણા)

AB = BA (સામાન્ય બાજુ)

∴ બાખૂબા મુજબ Δ DAB ≅ Δ CBA

∴ BD = AC (CPCT) ... ... (2)

હવે, Δ AMB અને Δ CMBમાં,

AM = CM (BD એ ACને Mમાં દુભાગે છે)

BM = BM (સામાન્ય બાજુ)

AB = CB (ચોરસની બાજુઓ)

∴ બાબાબા મુજબ, Δ AMB ≅ Δ CMB

∴ ∠AMB = ∠CMB (CPCT)

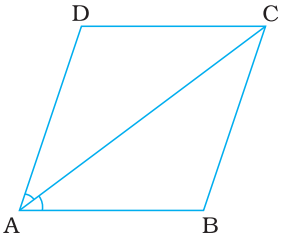
પરંતુ, ∠AMB અને ∠CMB રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

$\therefore \angle AMB + \angle CMB = 180°$

આમ, $\angle AMB = \angle CMB = 90°$ ... ... (3)

(1), (2) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDનો વિકર્ણ AC એ $\angle A$ને દુભાગે છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, (i) તે $\angle C$ને પણ દુભાગે છે. (ii) ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDનો વિકર્ણ AC એ $\angle A$ને દુભાગે છે.

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$ ... ... (1)

હવે, $\angle BAC$ અને $\angle DCA$ એ $AB \parallel CD$ની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે.

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ ... ... (2)

તે જ રીતે, $\angle DAC$ અને $\angle BCA$ એ $AD \parallel BC$ની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે.

$\therefore \angle DAC = \angle BCA$ ... ... (3)

(1), (2) અને (3) પરથી,

$\angle DCA = \angle BCA$

વળી, $\angle DCA + \angle BCA = \angle BCD$ (આસન્નકોણ)

આથી AC એ $\angle C$ને પણ દુભાગે છે. ... પરિણામ (i)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં,

$\angle A = \angle C$ (પ્રમેય 8.4)

$\therefore \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$

$\therefore \Delta DAC$માં $DA = DC$ (સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ)

વળી, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં,

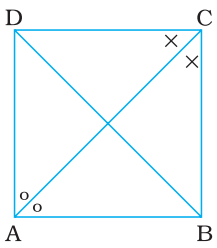
$AB = CD$ અને $BC = DA$ (પ્રમેય 8.2)

$\therefore AB = BC = CD = DA$

આમ, ચતુષ્કોણ ABCDમાં ચારેય બાજુઓ સમાન છે.

માટે, ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે. ... પરિણામ (ii)

4. લંબચોરસ ABCDમાં વિકર્ણ AC એ $\angle A$ તેમજ $\angle C$ને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે, (i) ABCD ચોરસ છે. (ii) વિકર્ણ BD એ $\angle B$ તેમજ $\angle D$ને દુભાગે છે.



લંબચોરસ ABCDમાં $AB = CD$, $BC = AD$, $AB \parallel CD$ અને $BC \parallel AD$.

AC એ $\angle A$ને તેમજ $\angle C$ને દુભાગે છે.

$\therefore \angle DAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle A$ અને

$\angle DCA = \angle BCA = \frac{1}{2}\angle C$

હવે, AC એ $AB \parallel CD$ની છેદિકા છે.

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ (યુગ્મકોણ)

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$

આમ, ΔDACમાં $\angle DAC = \angle DCA$ મળે.

$\therefore AD = CD$ (સમાન ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ)

આ પરથી $AB = BC = CD = DA$ સાબિત થાય.

વળી, ABCD લંબચોરસ હોવાથી

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

માટે, ABCD ચોરસ છે. ... પરિણામ (i)

ΔBCDમાં $BC = CD$

$\therefore \angle CBD = \angle CDB$

વળી, $AB \parallel CD$ની છેદિકા BD હોવાથી

$\angle CDB = \angle ABD$ (યુગ્મકોણ)

આથી $\angle CBD = \angle ABD$

વળી, $\angle CBD + \angle ABD = \angle ABC$

$\therefore \angle CBD = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC$

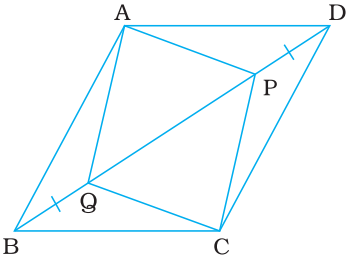
આમ, BD એ $\angle B$ને દુભાગે છે.

તે જ રીતે, BD એ $\angle D$ને દુભાગે છે.

આમ, વિકર્ણ BD એ $\angle B$ તેમજ $\angle D$ને દુભાગે છે.

... પરિણામ (ii)

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં વિકર્ણ BD પર બે બિંદુઓ P અને Q એવાં લીધાં છે કે જેથી DP = BQ થાય. (જુઓ આકૃતિ) બતાવો કે, (i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$ (ii) AP = CQ (iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ (iv) AQ = CP (v) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore AD \parallel BC$ અને વિકર્ણ BD તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ (યુગ્મકોણ)

$\therefore \angle ADP = \angle CBQ$ ... ... (1)

તે જ રીતે, $CD \parallel BA$ અને BD તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$ (યુગ્મકોણ)

$\therefore \angle ABQ = \angle CDP$ ... ... (2)

ΔAPD અને ΔCQBમાં,

$AD = CB$ (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ)

$\angle ADP = \angle CBQ$ ((1) મુજબ)

$DP = BQ$ (પક્ષ)

$\therefore$ બાબૂબા મુજબ $\Delta APD \cong \Delta CQB$ ... પરિણામ (i)

$\therefore AP = CQ$ (CPCT) ... પરિણામ (ii)

ΔAQB અને ΔCPDમાં,

$AB = CD$ (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ)

$\angle ABQ = \angle CDP$ ((2) મુજબ)

$BQ = DP$ (પક્ષ)

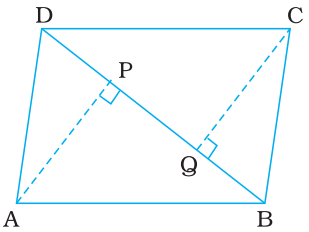
$\therefore$ બાબૂબા મુજબ, $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ ... પરિણામ (iii)

$\therefore AQ = CP$ (CPCT) ... પરિણામ (iv)

હવે, ચતુષ્કોણ APCQમાં $AP = CQ$ અને $AQ = CP$ હોવાથી પ્રમેય 8.3 મુજબ APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

... પરિણામ (v)

6. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને Cમાંથી વિકર્ણ BD પર અનુક્રમે AP અને CQ લંબ દોરેલ છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (ii) $AP = CQ$



સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel CD$ અને BD તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$ (યુગ્મકોણ)

$\therefore \angle ABP = \angle CDQ$ ... ... (1)

હવે, ΔAPB અને ΔCQDમાં,

$AB = CD$ (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ)

$\angle ABP = \angle CDQ$ ((1) મુજબ)

$\angle APB = \angle CQD$ (કાટખૂણા)

$\therefore$ ખૂખૂબા મુજબ, $\Delta APB \cong \Delta CQD$ ... પરિણામ (i)

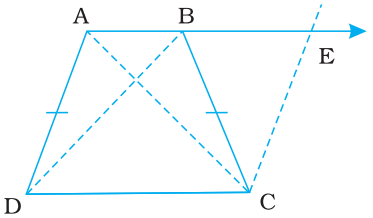
$\therefore AP = CQ$ (CPCT) ... પરિણામ (ii)

7. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel CD$ અને $AD = BC$. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે,

(i) $\angle A = \angle B$ (ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (iv) વિકર્ણ AC = વિકર્ણ BD

[સૂચના : AB ને લંબાવો અને Cમાંથી DAને સમાંતર તથા AB ને Eમાં છેદતી એક રેખા દોરો.]



ABને E સુધી લંબાવેલ છે અને $AB \parallel CD$.

$\therefore AE \parallel CD$

ચતુષ્કોણ ADCEમાં $AE \parallel CD$ અને રચના મુજબ $CE \parallel DA$.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ ADCE એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

માટે, $AD = CE$ અને $AD = BC$ (પક્ષ)

$\therefore BC = CE$

ΔBCEમાં $BC = CE$ હોવાથી,

$\angle CBE = \angle CEB$

$\therefore \angle CBE = \angle CEA$ ... ... (1)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ADCEમાં $AD \parallel CE$ અને AE તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle DAE + \angle CEA = 180°$ (છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ)

$\therefore \angle DAE + \angle CBE = 180°$ ((1) પરથી)

$\therefore \angle DAE = 180° - \angle CBE$ ... ... (2)

વળી, $\angle ABC + \angle CBE = 180°$ (રૈખિક જોડ)

$\therefore \angle ABC = 180° - \angle CBE$ ... ... (3)

(2) અને (3) પરથી,

$\angle DAE = \angle ABC$

$\therefore \angle A = \angle B$ ... પરિણામ (i)

$AB \parallel CD$ અને AD તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle A + \angle D = 180°$

$\therefore \angle D = 180° - \angle A$ ... ... (4)

$AB \parallel CD$ અને BC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle B + \angle C = 180°$

$\therefore \angle C = 180° - \angle B$

$\therefore \angle C = 180° - \angle A$ (પરિણામ (i) મુજબ) ... ... (5)

(4) અને (5) પરથી

$\angle C = \angle D$ ... પરિણામ (ii)

વિકર્ણો AC અને BD દોરો.

ΔABC અને ΔBADમાં,

$BC = AD$ (પક્ષ)

$\angle ABC = \angle BAD$ (પરિણામ (i) મુજબ)

$AB = BA$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાબૂબા મુજબ, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ ... પરિણામ (iii)

$\therefore AC = BD$ (CPCT)

આમ, વિકર્ણ AC = વિકર્ણ BD ... પરિણામ (iv)

નોંધ : જે સમલંબ ચતુષ્કોણમાં બિનસમાંતર બાજુઓની જોડ સમાન હોય તે સમલંબ ચતુષ્કોણને સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે. ઉપર સાબિત કર્યા મુજબ તેના વિકર્ણો સમાન હોય તથા સમાંતરબાજુઓ પરના ખૂણા સમાન હોય.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

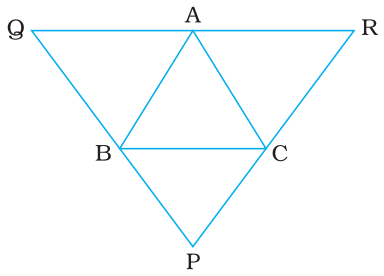
1. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો દરેક વિકર્ણ દ્વારા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન થાય છે.

2. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખૂણાઓનાં દ્વિભાજક પરસ્પર લંબ હોય છે.

3. ચતુષ્કોણ ABCDમાં, $\angle A$ અને $\angle B$ના દ્વિભાજકો Eમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\angle C + \angle D = 2\angle AEB$.

4. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાના દ્વિભાજકો સમાંતર હોય છે.

5. આપેલ આકૃતિમાં, ΔABCનાં શિરોબિંદુઓ A, B અને Cમાંથી અનુક્રમે BC, AC અને AB ને સમાંતર રેખાઓ દોરવાથી ΔPQR બને છે. સાબિત કરો કે, (1) $BC = \frac{1}{2}QR$ (2) $AB = \frac{1}{2}PR$ (3) $AC = \frac{1}{2}PQ$.



યાદ રાખો

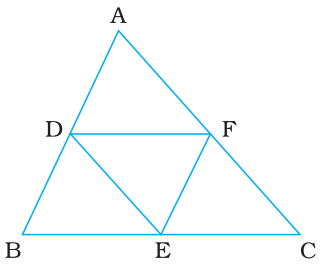
* **ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના ગુણધર્મ :** સ્વાધ્યાય 8.1માં સાબિત કરેલ પરિણામો પરથી નીચેના ગુણધર્મો તારવી શકાય :
  (1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે. (પ્રમેય 8.6)
  (2) સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે.
  (3) લંબચોરસના વિકર્ણો સમાન હોય છે અને પરસ્પર દુભાગે છે.
  (4) ચોરસના વિકર્ણો સમાન હોય છે અને પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે.
  ઉપરોક્ત વિધાનોના પ્રતીપ પણ સાચાં છે.

મધ્યબિંદુ પ્રમેય :

* **પ્રમેય 8.8 :** ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેનાથી અડધો છે.
* **પ્રમેય 8.9 :** ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.
* ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.
* લંબચોરસની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
* ચોરસની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ ચોરસ છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજનો દાખલો

6. Δ ABCમાં બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ) D, E અને Fને જોડતાં, Δ ABCનું ચાર એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન થાય છે તેમ બતાવો.



બાજુઓ AB અને BCનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E હોવાથી, પ્રમેય 8.8ના ઉપયોગથી DE ∥ AC મળે.

તે જ પ્રમાણે, DF ∥ BC અને EF ∥ AB

માટે ADEF, BDFE અને DFCE બધા જ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BDFEનો વિકર્ણ DE છે.

માટે, Δ BDE ≅ Δ FED

તે જ પ્રમાણે, Δ DAF ≅ Δ FED અને Δ EFC ≅ Δ FED

આથી ચારેય ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

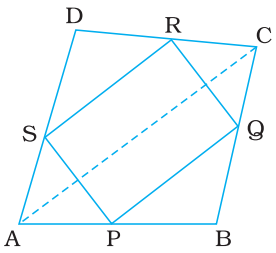
સ્વાધ્યાય 8.2 | પાના નં. 101 – 102

1. ચતુષ્કોણ ABCDની બાજુઓ AB, BC, CD અને DAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. (જુઓ આકૃતિ 1) AC તેનો વિકર્ણ છે. સાબિત કરો કે,

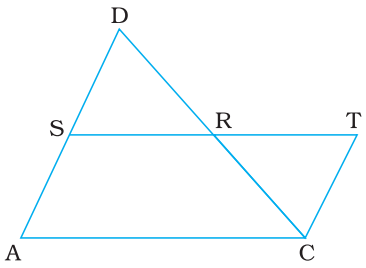
(i) SR ∥ AC અને SR = $\frac{1}{2}$AC

(ii) PQ = SR

(iii) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 1



આકૃતિ 2

Δ DACમાં S અને R અનુક્રમે DA તથા DCનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

Cમાંથી ADને સમાંતર રેખા દોરો જે રેખા SRને T બિંદુમાં છેદે.

Δ DRS અને Δ CRTમાં,

∠ DRS = ∠ CRT (અભિકોણ)

∠ RSD = ∠ RTC (DS ∥ TCની છેદિકા ST દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

DR = CR (R એ DCનું મધ્યબિંદુ છે.)

∴ ખૂખૂબા મુજબ, Δ DRS ≅ Δ CRT

∴ DS = CT અને SR = RT (CPCT)

પરંતુ, S એ DAનું મધ્યબિંદુ હોવાથી DS = SA

આમ, SA = CT

વળી, રચના મુજબ SA ∥ CT

∴ ચતુષ્કોણ SACT સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ ST ∥ AC

∴ SR ∥ AC ... ... (1)

હવે, SR = RT હોવાથી SR = $\frac{1}{2}$ST

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ SACTમાં ST = AC

∴ SR = $\frac{1}{2}$AC ... ... (2)

(1) અને (2) સાથે લેતાં,

SR ∥ AC અને SR = $\frac{1}{2}$AC ... પરિણામ (i)

તે જ પ્રમાણે, Δ ABCમાં P અને Q અનુક્રમે AB અને BCનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

∴ PQ ∥ AC અને PQ = $\frac{1}{2}$AC

હવે, SR = $\frac{1}{2}$AC અને PQ = $\frac{1}{2}$AC

∴ PQ = SR ... પરિણામ (ii)

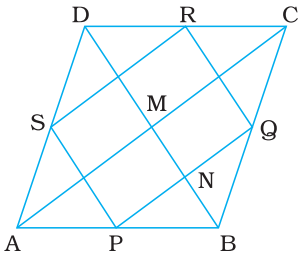
તે જ રીતે, SR ∥ AC અને PQ ∥ AC

∴ PQ ∥ SR

ચતુષ્કોણ PQRSમાં PQ = SR અને PQ ∥ SR હોવાથી ચતુષ્કોણ PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

... પરિણામ (iii)

2. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને P, Q, R અને S એ અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DAનાં મધ્યબિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે, ચતુષ્કોણ PQRS એ લંબચોરસ છે.



ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને P, Q, R અને S અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DAનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

Δ ABCમાં PQ $\parallel$ AC અને PQ $= \frac{1}{2}$AC.

Δ ADCમાં SR $\parallel$ AC અને SR $= \frac{1}{2}$AC.

માટે, ચતુષ્કોણ PQRSમાં PQ $\parallel$ SR અને PQ = SR

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

વળી, ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી AC અને BD કાટખૂણે દુભાગે છે.

$\therefore \angle AMB = 90°$

હવે, AC $\parallel$ PQ અને MN તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle AMN + \angle MNP = 180°$ (છેદિકાની એક તરફના અંત:કોણ)

$\therefore \angle AMB + \angle MNP = 180°$

$\therefore 90° + \angle MNP = 180°$

$\therefore \angle MNP = 90°$

Δ ABDમાં P અને S અનુક્રમે AB અને ADના મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ PS $\parallel$ BD અને તેમની છેદિકા NP છે.

$\therefore \angle DNP + \angle NPS = 180°$

$\therefore \angle MNP + \angle NPS = 180°$

$\therefore 90° + \angle NPS = 180°$

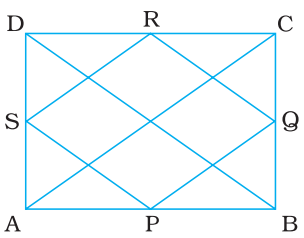
$\therefore \angle NPS = 90°$

$\therefore \angle SPQ = 90°$

આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSનો એક ખૂણો $\angle$P કાટખૂણો છે.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRS લંબચોરસ છે.

3. ABCD લંબચોરસ છે અને તેની બાજુઓ AB, BC, CD અને DAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે, ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



ABCD લંબચોરસ હોવાથી તેના વિકર્ણો સમાન છે.

$\therefore$ AC = BD

$\therefore \frac{1}{2}$AC $= \frac{1}{2}$BD

Δ ABCમાં P અને Q અનુક્રમે AB અને BCનાં મધ્યબિંદુઓ છે.

$\therefore$ PQ $= \frac{1}{2}$AC

તે જ રીતે, Δ ADCમાં SR $= \frac{1}{2}$AC,

Δ ABDમાં SP $= \frac{1}{2}$ BD અને Δ BCDમાં QR $= \frac{1}{2}$ BD

હવે, PQ = SR $= \frac{1}{2}$AC, SP = QR $= \frac{1}{2}$BD અને

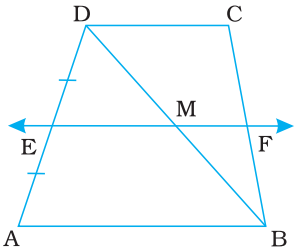
$\frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2}$ BD

માટે, ચતુષ્કોણ PQRSમાં PQ = QR = RS = SP

આમ, ચતુષ્કોણ PQRSની બધી જ બાજુઓ સમાન છે.

માટે, ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

4. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB $\parallel$ DC, BD વિકર્ણ છે અને ADનું મધ્યબિંદુ E છે. Eમાંથી ABને સમાંતર અને BCને Fમાં છેદતી એક રેખા દોરી છે. (જુઓ આકૃતિ) F એ BCનું મધ્યબિંદુ છે તેમ બતાવો.



ધારો કે, Eમાંથી ABને સમાંતર દોરેલ રેખા EF એ BDને Mમાં છેદે છે.

EF $\parallel$ AB અને AB $\parallel$ DC

$\therefore$ EF $\parallel$ DC

વિકર્ણ BD દ્વારા બે ત્રિકોણ Δ ABD અને Δ BCD મળે છે.

Δ ABDમાં E એ ADનું મધ્યબિંદુ છે અને Eમાંથી ABને સમાંતર દોરેલ રેખા BDને Mમાં છેદે છે.

માટે, પ્રમેય 8.9 મુજબ M એ BDનું મધ્યબિંદુ છે.

હવે, Δ BCDમાં M એ BDનું મધ્યબિંદુ છે અને Mમાંથી પસાર થતી રેખા MF એ DCને સમાંતર છે.

માટે, પ્રમેય 8.9 મુજબ F એ BCનું મધ્યબિંદુ છે.

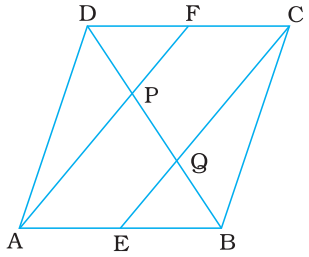
નોંધ : અહીં EFની લંબાઈ અંગેનું નીચે મુજબનું પરિણામ પણ મેળવી શકાય :

EF $= \frac{1}{2}$(AB + CD)

તદ્ઉપરાંત, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BDનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે X અને Y હોય, તો નીચે મુજબનું પરિણામ મળે :

XY $= \frac{1}{2}|AB - CD|$

5. **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં બાજુઓ AB અને CDનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, રેખાખંડ AF અને EC વિકર્ણ BDનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.**



AB અને CDનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે.

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ અને $CF = \frac{1}{2}CD$

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB = CD$ અને $AB \parallel CD$.

$\therefore AE = CF$ અને $AE \parallel CF$

આથી ચતુષ્કોણ AECF સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore AF \parallel EC$

$\therefore AP \parallel EQ$

ΔABPમાં E એ ABનું મધ્યબિંદુ છે અને $EQ \parallel AP$.

$\therefore$ Q એ PBનું મધ્યબિંદુ છે. (પ્રમેય 8.9)

$\therefore PQ = QB$ ... ... (1)

તે જ રીતે ΔDQCમાં F એ DCનું મધ્યબિંદુ છે અને $FP \parallel CQ$.

$\therefore$ P એ DQનું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore DP = PQ$ ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી $DP = PQ = QB$ અને

$DP + PQ + QB = BD$.

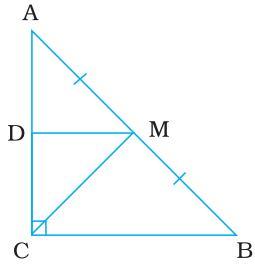
આમ, AF અને EC એ વિકર્ણ BDનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.

6. **ΔABCમાં $\angle C$ કાટકોણ છે. કર્ણ ABના મધ્યબિંદુ Mમાંથી પસાર થતી અને BCને સમાંતર રેખા ACને Dમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે,**

(i) D એ ACનું મધ્યબિંદુ છે.

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$



ΔABCમાં $\angle C$ કાટકોણ છે. કર્ણ ABના મધ્યબિંદુ Mમાંથી પસાર થતી અને BCને સમાંતર રેખા ACને Dમાં છેદે છે.

આથી પ્રમેય 8.9 મુજબ DM એ ACને દુભાગે છે.

માટે, D એ ACનું મધ્યબિંદુ છે. ... પરિણામ (i)

ΔABCમાં $\angle C$ કાટખૂણો છે.

$\therefore \angle C = 90°$

$BC \parallel DM$ અને DC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle MDC + \angle DCB = 180°$ (છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ)

$\therefore \angle MDC + 90° = 180°$

$\therefore \angle MDC = 90°$

આમ, MD એ ACને લંબ છે.

એટલે કે, $MD \perp AC$ ... પરિણામ (ii)

હવે, ΔADM અને ΔCDMમાં,

$AD = CD$ (D એ ACનું મધ્યબિંદુ છે.)

$\angle ADM = \angle CDM$ ($MD \perp AC$ હોવાથી કાટખૂણા)

$DM = DM$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ, $\Delta ADM \cong \Delta CDM$

$\therefore AM = CM$ (CPCT) ... ... (1)

વળી M એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.

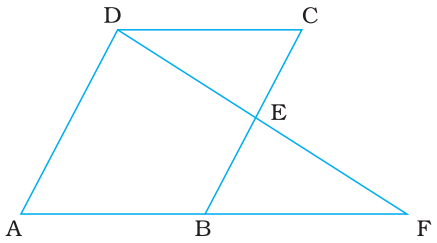
$\therefore AM = \frac{1}{2}AB$ ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

$CM = MA = \frac{1}{2}AB$ સાબિત થાય. ... પરિણામ (iii)

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDની બાજુ BCનું મધ્યબિંદુ E છે. AB અને DEને લંબાવતા તેઓ Fમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $AF = 2AB$.



2. ΔABCમાં, AB પર M અને AC પર N બિંદુઓ એવાં છે કે જેથી $AM = \frac{1}{4}AB$ અને $AN = \frac{1}{4}AC$ થાય. સાબિત કરો કે, $MN = \frac{1}{4}BC$.

3. ΔABCમાં, AD મધ્યગા છે અને ADનું મધ્યબિંદુ E છે. BEને લંબાવતા તે ACને Fમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $AF = \frac{1}{3}AC$.

4. સાબિત કરો કે, સમલંબ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી મળતો રેખાખંડ સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતરબાજુઓને સમાંતર હોય છે.

5. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB ∥ CD અને E એ ADનું મધ્યબિંદુ છે. Eમાંથી ABને સમાંતર દોરેલ રેખા BCને Fમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, F એ BCનું મધ્યબિંદુ છે તથા $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

6. ΔABCમાં, બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. જો AB = 6 સેમી, BC = 7.2 સેમી અને CA = 7.8 સેમી હોય, તો ΔDEFની પરિમિતિ શોધો.

7. ΔABCમાં, બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q અને R છે. જો PQ = 5 સેમી, QR = 8 સેમી અને RP = 6.5 સેમી હોય, તો ΔABCની પરિમિતિ શોધો.

8. ΔABCમાં, M અને N અનુક્રમે AB અને ACનાં મધ્યબિંદુઓ છે. જો AB = 8 સેમી, AC = 7 સેમી અને MN = 4.5 સેમી હોય, તો ΔABCની પરિમિતિ શોધો.

9. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખૂણાઓના દ્વિભાજક પરસ્પર લંબ હોય છે.

10. ΔABCમાં, AB પર M અને AC પર N બિંદુઓ એવાં છે કે જેથી $AM = \frac{1}{4}AB$ અને $AN = \frac{1}{4}AC$ થાય. સાબિત કરો કે, $MN = \frac{1}{4}BC$.

11. 36 સેમી પરિમિતિ ધરાવતાં હોય તેવા ચાર જુદા જુદા લંબચોરસ અથવા ચોરસની લંબાઈ તથા પહોળાઈનાં માપ જણાવો. આ દરેક આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. તમારું તારણ જણાવો.

જવાબો : **6.** 10.5 સેમી **7.** 39 સેમી **8.** 24 સેમી

11.

	લંબાઈ	પહોળાઈ	ક્ષેત્રફળ
લંબચોરસ ABCD	15 સેમી	3 સેમી	45 સેમી^{2}
લંબચોરસ PQRS	12 સેમી	6 સેમી	72 સેમી^{2}
લંબચોરસ XYZW	10 સેમી	8 સેમી	80 સેમી^{2}
ચોરસ GBKS	9 સેમી	9 સેમી	81 સેમી^{2}

તારણ : સમાન પરિમિતિ ધરાવતા લંબચોરસો પૈકી ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર ..... છે.
(લંબ, દુભાગે, સમાન)

(2) ચતુષ્કોણના ચારેય ખૂણાઓનો સરવાળો ..... થાય.
(90°, 180°, 360°)

(3) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે ..... ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે.
(સમરૂપ, એકરૂપ, ગુરુકોણ)

(4) ΔABCમાં D અને E અનુક્રમે AB અને ACનાં મધ્યબિંદુ છે. જો BC = 8.2 સેમી હોય, તો DE = ... સેમી. *(16.4, 4.1, 8.2)*

(5) ΔPQRની બાજુઓ PQ, QR અને RPનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે X, Y અને Z છે. જો ΔXYZની પરિમિતિ 12.7 સેમી હોય, તો ΔPQRની પરિમિતિ ..... સેમી થાય. *(6.35, 12.7, 25.4)*

(6) ΔABCની બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q અને R છે. જો AB = 6.4 સેમી, BC = 4.6 સેમી અને AC = 9.2 સેમી હોય, તો PQ = ... સેમી. *(3.2, 2.3, 4.6)*

(7) સમબાજુ ΔABCની બાજુઓ AB, BC તથા CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે X, Y અને Z છે. જો AB = 8.4 સેમી હોય, તો ΔXYZની પરિમિતિ ..... સેમી થાય. *(4.2, 8.4, 12.6)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB = 8 સેમી અને BC = 5 સેમી હોય, તો ABCDની પરિમિતિ શોધો.

(2) ΔABCની બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q અને R છે, તો ચતુષ્કોણ PBCR કેવો ચતુષ્કોણ છે?

(3) જે ચતુષ્કોણના સમાન વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે, તે ચતુષ્કોણનો પ્રકાર જણાવો.

(4) ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3 : 4 : 5 : 6$ હોય, તો ચતુષ્કોણના સૌથી નાના ખૂણાનું માપ શોધો.

(5) લંબચોરસ ABCDમાં AB = 8 સેમી અને BC = 15 સેમી હોય, તો BD શોધો.

(6) ΔABCમાં P અને Q અનુક્રમે AB અને ACનાં મધ્યબિંદુ છે. જો PQ + BC = 9.6 સેમી હોય, તો BC શોધો.

(7) લંબચોરસ PQRSમાં PQ = 21 સેમી અને QS = 29 સેમી હોય, તો QR શોધો.

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A = 75°$ હોય, તો $\angle B$ = ...

A. 75° B. 150° C. 15° D. 105°

(2) સમબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSમાં SP = 14 સેમી હોય, તો તેની પરિમિતિ ..... સેમી થાય.

A. 28 B. 42 C. 56 D. 70

(3) જે ચતુષ્કોણના વિકર્ણો કાટખૂણે છેદે પરંતુ પરસ્પર દુભાગે નહીં તે ..... છે.

A. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ B. સમલંબ ચતુષ્કોણ

C. સમબાજુ ચતુષ્કોણ D. પતંગાકાર

(4) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D$ = ... શક્ય છે.

A. 4 : 5 : 4 : 5 B. 3 : 4 : 5 : 6

C. 2 : 3 : 2 : 5 D. 1 : 2 : 3 : 4

(5) સમબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSના વિકર્ણો PR અને QS Mમાં છેદે છે, તો $\angle PMQ$ = ...

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

(6) લંબચોરસ ABCDમાં AB = 12 સેમી છે. જો ABCDનું ક્ષેત્રફળ 72 સેમી^{2} હોય, તો તેની પરિમિતિ ..... સેમી થાય.

A. 6 B. 18 C. 24 D. 36

(7) ΔABCની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી ΔXYZ મળે છે. જો ΔABCની સૌથી મોટી બાજુનું માપ 12 સેમી અને સૌની નાની બાજુનું માપ 5 સેમી હોય, તો ΔXYZની સૌથી મોટી બાજુનું માપ ..... સેમી થાય.

A. 12 B. 6 C. 5 D. 2.5

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) લંબચોરસના સામસામેના ખૂણા પૂરક હોય છે.

(2) દરેક લંબચોરસ એ ચોરસ પણ છે.

(3) સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી લંબચોરસ મળે.

(4) પતંગાકારના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે.

(5) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા પૂરક હોય છે.

(6) ચોરસની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી ચોરસ મળે.

(7) બે એકરૂપ સમબાજુ ત્રિકોણોને એક બાજુથી જોડતાં ચોરસ મળે.

5. ΔABCની બાજુઓ AB, BC અને CAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે X, Y અને Z છે. આ માહિતીના સંદર્ભે નીચેનાં જોડકાં યોગ્ય રીતે જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. જો AB = 5.2 સેમી, તો YZ = ...	a. XZ = YZ
2. જો BC = 8.4 સેમી, તો XZ = ...	b. 2.4 સેમી
3. જો AC = 6.8 સેમી, તો XY = ...	c. XY = YZ
4. જો ΔABCમાં AB = BC હોય, તો ΔXYZમાં	d. 2.6 સેમી
	e. 4.2 સેમી
	f. 3.4 સેમી

જવાબો

1. (1) દુભાગે (2) 360° (3) એકરૂપ (4) 4.1 (5) 25.4 (6) 4.6 (7) 12.6

2. (1) 26 સેમી (2) સમલંબ ચતુષ્કોણ (3) ચોરસ (4) 60° (5) 17 સેમી (6) 6.4 સેમી (7) 20 સેમી

3. (1) D. 105° (2) C. 56 (3) D. પતંગાકાર (4) A. 4 : 5 : 4 : 5 (5) C. 90° (6) D. 36 (7) B. 6

4. (1) ખરું (2) ખોટું (3) ખરું (4) ખોટું (5) ખોટું (6) ખરું (7) ખોટું

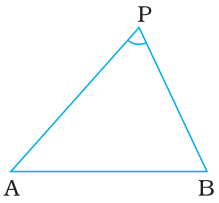
5. 1 → d, 2 → e, 3 → f, 4 → a.

9 વર્તુળ (CIRCLES)

યાદ રાખો

જીવાએ કોઈ બિંદુ આગળ આંતરેલો ખૂણો :

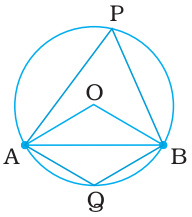
* **રેખાખંડે બિંદુ આગળ આંતરેલ ખૂણો :** આપેલ રેખાખંડની બહારના બિંદુને રેખાખંડનાં અંત્યબિંદુઓ સાથે જોડવાથી જે ખૂણો બને તે ખૂણાને આપેલ રેખાખંડે તે બિંદુ આગળ આંતરેલ ખૂણો (Subtended angle) કહે છે.



અહીં, આકૃતિમાં રેખાખંડ ABની બહારનું બિંદુ P છે. PA અને PB દોરવાથી ∠APB મળે છે, જેને રેખાખંડ AB એ P આગળ આંતરેલ ખૂણો કહેવાય.

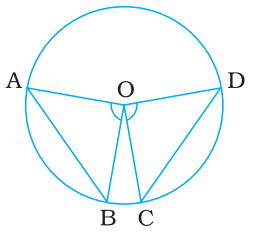
* **વર્તુળની જીવાએ આંતરેલ ખૂણા :** O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં AB જીવા છે, P એ ગુરુચાપ AB પરનું બિંદુ છે અને Q એ લઘુચાપ AB પરનું બિંદુ છે.

અહીં, ∠AOB એ જીવા AB એ કેન્દ્ર O આગળ આંતરેલ ખૂણો છે, ∠APB એ જીવા AB એ ગુરુચાપ પરના બિંદુ P આગળ આંતરેલ ખૂણો છે અને ∠AQB એ જીવા AB એ લઘુચાપ પરના બિંદુ Q આગળ આંતરેલ ખૂણો છે.



* **પ્રમેય 9.1 :** વર્તુળ(એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ, વર્તુળના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

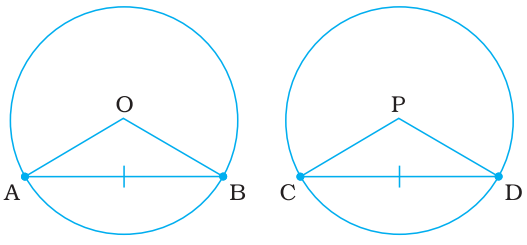
* **પ્રમેય 9.2 :** જો વર્તુળ(સમાન વર્તુળો)ની બે જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.



ઉપરોક્ત બંને પ્રમેય એકબીજાના પ્રતીપ છે. જો AB = CD આપેલ હોય, તો ∠AOB = ∠COD સાબિત થાય અને જો ∠AOB = ∠COD આપેલ હોય, તો AB = CD સાબિત થાય.

સ્વાધ્યાય 9.1 | પાના નં. 105

1. યાદ કરો કે જો બે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો તે બે વર્તુળો સમાન છે. સાબિત કરો કે, સમાન વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.



O કેન્દ્ર અને P કેન્દ્ર ધરાવતાં બે વર્તુળો સમાન છે. ઉપરાંત, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા AB અને P કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા CD પણ સમાન છે.

Δ OAB અને Δ PCDમાં,

OA = PC અને OB = PD (સમાન વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ)

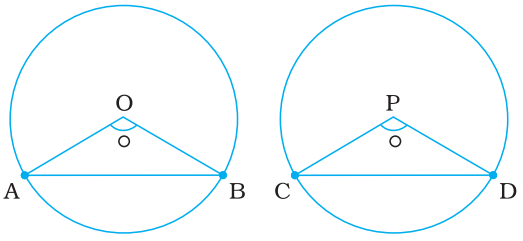
ઉપરાંત, AB = CD (પક્ષ)

∴ બાબાબા મુજબ, Δ OAB ≅ Δ PCD

∴ ∠AOB = ∠CPD

આમ, સમાન વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

2. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓ તેમના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.



O કેન્દ્ર અને P કેન્દ્ર ધરાવતાં બે વર્તુળો સમાન છે. ઉપરાંત, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં જીવા AB એ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલ $\angle AOB$ અને P કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં જીવા CD એ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલ $\angle CPD$ પણ સમાન છે.

ΔOAB અને ΔPCDમાં,

$OA = PC$ અને $OB = PD$ (સમાન વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ)

ઉપરાંત, $\angle AOB = \angle CPD$ (પક્ષ)

$\therefore$ બાખૂબા મુજબ, $\Delta OAB \cong \Delta PCD$

$\therefore AB = CD$

આમ, એકરૂપ (સમાન) વર્તુળોની જીવાઓ તેમના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

યાદ રાખો

કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ :

* **પ્રમેય 9.3 :** વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.
* **પ્રમેય 9.4 :** વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.

  ઉપરોક્ત બંને પ્રમેય એકબીજાના પ્રતીપ છે.
* **અગત્યનું પરિણામ :** વર્તુળની જીવાનો લંબદ્વિભાજક વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.
* **રેખા અને બિંદુ વચ્ચેનું અંતર :** રેખા AB અને તેની બહારનું બિંદુ P હોય, તો Pમાંથી AB પર દોરેલ લંબ PM મેળવો, જ્યાં M એ AB નું બિંદુ હોય. આ રેખાખંડ PMની લંબાઈને બિંદુ Pનું રેખા ABથી અંતર અથવા રેખા ABનું બિંદુ Pથી અંતર કહે છે. બિંદુ P રેખા AB પર હોય તો તેનું રેખાથી અંતર શૂન્ય થાય.

સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર :

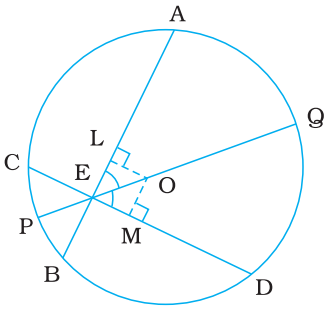
* **પ્રમેય 9.5 :** વર્તુળ(અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર(કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.
* **પ્રમેય 9.6 :** વર્તુળ(એકરૂપ વર્તુળ)ના કેન્દ્ર(અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજનો દાખલો

1. જો વર્તુળની પરસ્પર છેદતી બે જીવાઓ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે, તો સાબિત કરો કે તે જીવાઓ સમાન છે.

O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજાને E બિંદુમાં છેદે છે. $\angle AEQ = \angle DEQ$ થાય તેવો Eમાંથી પસાર થતો વ્યાસ PQ છે. (જુઓ આકૃતિ)

જીવાઓ AB અને CD પર અનુક્રમે લંબ OL અને OM દોરો.



હવે,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO$

(ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 90° - \angle LEO$

$= 90° - \angle AEQ$

$= 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

ત્રિકોણો OLE અને OMEમાં,

$\angle LEO = \angle MEO$ (પક્ષ મુજબ $\angle AEQ = \angle DEQ$)

$\angle LOE = \angle MOE$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$EO = EO$ (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (ખૂબાખૂ મુજબ)

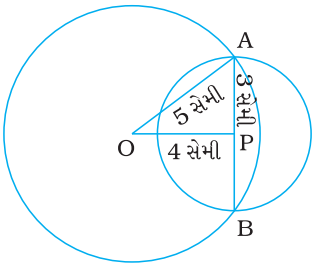
તે પરથી $OL = OM$ (CPCT)

આથી $AB = CD$ (પ્રમેય 9.6)

નોંધ : $\Delta OLE \cong \Delta OME$ સાબિત કરવા $\angle LEO = \angle MEO$, $\angle OLE = \angle OME$ (કાટખૂણા) તથા $EO = EO$ લઈને ખૂખૂબાનો ઉપયોગ પણ થઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 9.2 | પાના નં. 107 – 108

1. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.



O કેન્દ્ર અને 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ P કેન્દ્ર અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને બે બિંદુઓ A અને Bમાં છેદે છે. આથી AB તેઓની સામાન્ય જીવા છે.

વળી, OP = 4 સેમી આપેલ છે.

OA = 5 સેમી અને PA = 3 સેમી થાય.

Δ OAPમાં, $OA^2 = 5^2 = 25$ અને

$OP^2 + AP^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

આમ, Δ OAPમાં $OA^2 = OP^2 + AP^2$

∴ Δ OAP કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં OA કર્ણ અને ∠ OPA કાટખૂણો છે.

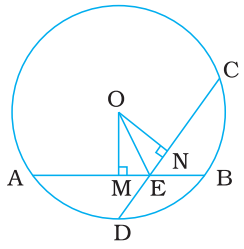
આમ, O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં OP એ જીવા ABને લંબ છે.

∴ OP એ ABને દુભાગે છે.

∴ AB = 2PA = 2 × 3 = 6 સેમી

આમ, આપેલ વર્તુળોની સામાન્ય જીવાની લંબાઈ **6 સેમી** થાય.

2. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો એક જીવાના કપાતા ભાગ અને બીજી જીવાના અનુરૂપ ભાગ સમાન છે તેમ સાબિત કરો.



O કેન્દ્રિત વર્તુળની સમાન જીવાઓ AB અને CD પરસ્પર E બિંદુમાં છેદે છે.

OM ⊥ AB તથા ON ⊥ CD દોરો.

∴ $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ અને $CN = DN = \frac{1}{2}CD$ થાય.

પરંતુ AB = CD છે.

∴ AM = BM = CN = DN ... ... (1)

જીવાઓ AB અને CD સમાન હોવાથી કેન્દ્રથી સમાન અંતરે છે.

∴ OM = ON

Δ OME અને Δ ONEમાં,

∠ OME = ∠ ONE (કાટખૂણા)

OE = OE (સામાન્ય બાજુ)

OM = ON

∴ કાકબા મુજબ, Δ OME ≅ Δ ONE

∴ ME = EN ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

AM + ME = CN + NE

∴ AE = CE

તે જ રીતે, BM – ME = DN – NE

∴ BE = DE

આમ, વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ AB અને CD વર્તુળની અંદર છેદતી હોવાથી તેમના અનુરૂપ ભાગો AE અને CE તથા BE અને DE સમાન છે.

3. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો સાબિત કરો કે છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

દાખલા 3માં આપેલ માહિતી દાખલા 2ની માહિતીને સમાન છે. આથી આપણે દાખલા 2ની સાબિતીનો યોગ્ય સ્થાન સુધી ઉપયોગ કરીશું.

દાખલા 2માં આપણે સાબિત કર્યું કે,

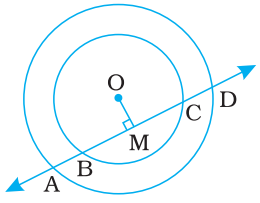
Δ OME ≅ Δ ONE

∴ ∠ OEM = ∠ OEN

∴ ∠ OEA = ∠ OEC

આમ, છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

4. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી (Concentric) વર્તુળો(સમાન કેન્દ્રવાળાં વર્તુળો)ને એક રેખા અનુક્રમે A, B, C અને Dમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે AB = CD. (જુઓ આકૃતિ)



કેન્દ્ર Oમાંથી રેખા AD પર લંબ OM દોરો.

મોટા વર્તુળની જીવા AD પર કેન્દ્ર Oમાંથી લંબ OM દોરેલ છે. માટે, M એ ADનું મધ્યબિંદુ છે.

∴ MA = MD ... ... (1)

નાના વર્તુળની જીવા BC પર કેન્દ્ર Oમાંથી લંબ OM દોરેલ છે. માટે, M એ BCનું મધ્યબિંદુ છે.

∴ MB = MC ... ... (2)

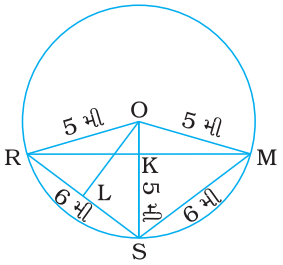
(1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

MA – MB = MD – MC

∴ AB = CD

5. એક વિહારસ્થાનમાં **5** મી ત્રિજ્યાવાળા દોરેલા વર્તુળ પર રમત રમવા માટે ત્રણ છોકરીઓ રેશ્મા, સલમા અને મનદીપ ઊભાં છે. રેશ્મા દડાને સલમા તરફ ફેંકે છે. સલમા મનદીપ તરફ અને મનદીપ રેશ્મા તરફ દડો ફેંકે છે. જો રેશ્મા અને સલમા વચ્ચેનું તથા સલમા અને મનદીપ વચ્ચેનું દરેક અંતર **6** મીટર હોય, તો રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે?

અહીં દર્શાવેલ વર્તુળ પર R, S અને M અનુક્રમે રેશ્મા, સલમા અને મનદીપનાં સ્થાન દર્શાવે છે.



આથી OR = OM = OS = 5 મીટર (વર્તુળની ત્રિજ્યા)

તથા RS = SM = 6 મીટર

ચતુષ્કોણ ORSMમાં OR = OM = 5 મી અને

RS = SM = 6 મી

માટે, ચતુષ્કોણ ORSM પતંગાકાર છે.

આથી તેનો વિકર્ણ OS એ વિકર્ણ RMને કાટખૂણે દુભાગે છે.

∴ ∠ RKO = 90° ... ... (1)

વર્તુળના કેન્દ્ર Oમાંથી જીવા RM પર લંબ OK છે. માટે,

K એ RMનું મધ્યબિંદુ છે.

∴ RM = 2RK ... ... (2)

કેન્દ્ર Oમાંથી જીવા RS પર લંબ OL દોરો.

$\therefore RL = \frac{1}{2}RS = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ મી

Δ RLOમાં ∠ L = 90°

$\therefore RO^2 = OL^2 + RL^2$

$\therefore 5^2 = OL^2 + 3^2$

$\therefore 25 = OL^2 + 9$

$\therefore OL^2 = 16$

∴ OL = 4 મી

હવે, Δ ROSનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times RS \times OL$

$= \frac{1}{2} \times OS \times RK$ ((1) પરથી)

∴ RS × OL = OS × RK

∴ 6 × 4 = 5 × RK

∴ 24 = 5 × RK

$\therefore RK = \frac{24}{5} = 4.8$ મી

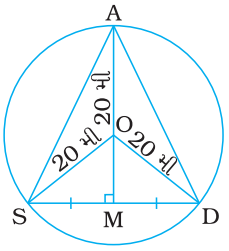
વળી, RM = 2RK ((2) મુજબ)

∴ RM = 2 × 4.8

∴ RM = 9.6 મી

આમ, રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર **9.6 મી** થાય.

6. એક વસાહતમાં **20** મીટર ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળાકાર વિહારસ્થાન આવેલું છે. ત્રણ છોકરાઓ અંકુર, સૈયદ અને ડેવિડ દરેક પોતાના હાથમાં રમકડાનો ટેલિફોન એકબીજા સાથે વાત કરવા માટે રાખીને વર્તુળની સીમા પર સરખા અંતરે બેઠા છે. દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ શોધો.



O કેન્દ્રિત વર્તુળ એ વિહારસ્થાન દર્શાવે છે તથા A, S અને D અનુક્રમે અંકુર, સૈયદ અને ડેવિડના સ્થાન દર્શાવે છે. અંકુર, સૈયદ અને ડેવિડ સરખા અંતરે બેઠા હોવાથી Δ ASD સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

SDના મધ્યબિંદુ Mમાંથી તેનો લંબદ્વિભાજક દોરતાં તે O અને A બંનેમાંથી પસાર થાય.

ધારો કે, SM = x મી

∴ SD = 2SM = $2x$ મી

સમબાજુ Δ ASDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (બાજુ)^2

$\therefore$ સમબાજુ Δ ASDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2x)^2$

$\therefore$ સમબાજુ Δ ASDનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{3}\,x^2$ ... ... (1)

કાટકોણ Δ OMSમાં ∠ M = 90°

$\therefore OM^2 = OS^2 - SM^2 = (20)^2 - (x)^2 = 400 - x^2$

$\therefore OM = \sqrt{400 - x^2}$

હવે, Δ OSDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times SD \times OM$

$\therefore$ Δ OSDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{400 - x^2}$

$\therefore$ Δ OSDનું ક્ષેત્રફળ $= x\sqrt{400 - x^2}$ ... ... (2)

અહીં, Δ OAS, Δ OSD અને Δ ODA એકરૂપ ત્રિકોણો છે.

Δ ASDનું ક્ષેત્રફળ = Δ OASનું ક્ષેત્રફળ + Δ OSDનું ક્ષેત્રફળ + Δ ODAનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ Δ ASDનું ક્ષેત્રફળ = 3 × Δ OSDનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore \sqrt{3} \cdot x^2 = 3 \times x\sqrt{400 - x^2}$

$\therefore x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{400 - x^2}$

$\therefore x^2 = 3(400 - x^2)$

$\therefore x^2 = 1200 - 3x^2$

$\therefore 4x^2 = 1200$

$\therefore x^2 = 300$

$\therefore x = 10\sqrt{3}$

SD $= 2x = 2 \times 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ મી

આમ, દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ **$20\sqrt{3}$ મી** થાય.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. PQ અને RS એ O કેન્દ્રિત વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓ છે. AB એ PQનો લંબદ્વિભાજક છે, જે RSને Bમાં અને PQને Aમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, AB એ જીવા RSને દુભાગે છે.

2. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB જીવા અને BC વ્યાસ છે. Oમાંથી AB પર લંબ OD દોરેલ છે. સાબિત કરો કે, OD $= \frac{1}{2}$AC.

3. O કેન્દ્રિત વર્તુળનો વ્યાસ 20 સેમી છે અને તેની જીવા ABની લંબાઈ 12 સેમી છે. ABનું Oથી અંતર શોધો.

4. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB અને CD જીવાઓ છે. AB = 48 સેમી, ABનું કેન્દ્ર Oથી અંતર 10 સેમી અને CDનું કેન્દ્ર Oથી અંતર 24 સેમી હોય, તો CDની લંબાઈ શોધો.

5. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB અને CD સમાંતર જીવાઓ છે, જે કેન્દ્રની વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલ છે. જો AB = 30 સેમી, CD = 48 સેમી તથા AB અને CD વચ્ચેનું અંતર 27 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

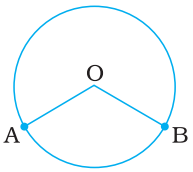
જવાબો : 3. 8 સેમી **4.** 20 સેમી **5.** 25 સેમી

યાદ રાખો

વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો :

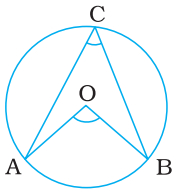
* જો વર્તુળની બે જીવા સમાન હોય, તો તેમને અનુરૂપ ચાપ એકરૂપ છે.
* જો વર્તુળના બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને અનુરૂપ જીવા સમાન છે.
* **વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો :** વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો એટલે તે ચાપની અનુરૂપ જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો.

લઘુચાપ AB કેન્દ્ર આગળ લઘુકોણ ∠AOB આંતરે છે અને ગુરુચાપ AB કેન્દ્ર આગળ વિપરીતકોણ ∠AOB આંતરે છે.

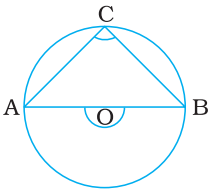


* વર્તુળના એકરૂપ ચાપ અથવા સમાન લંબાઈના ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

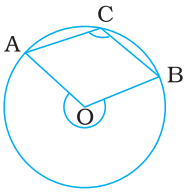
* **પ્રમેય 9.7 :** વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.



∠AOB = 2 ∠ACB



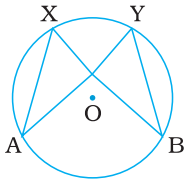
સરળકોણ ∠AOB = 2 ∠ACB



વિપરીતકોણ ∠AOB = 2 ∠ACB

નોંધ : અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

* **પ્રમેય 9.8 :** એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.



∠AXB = ∠AYB

* **પ્રમેય 9.9 :** જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે. (આ ચારેય બિંદુઓ વૃત્તીય (Concyclic) બિંદુઓ કહેવાય.)
* **ચક્રીય (Cyclic) ચતુષ્કોણ :** જે ચતુષ્કોણનાં બધાં જ શિરોબિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં હોય તે ચતુષ્કોણને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહે છે.

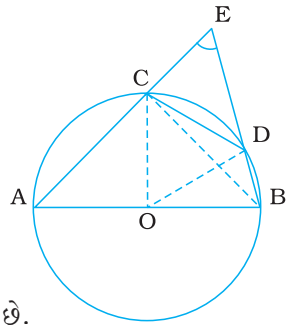
* **પ્રમેય 9.10 :** ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.
* **પ્રમેય 9.11 :** જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

આમ, જો ચતુષ્કોણ ABCD એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય, તો $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ અને જો ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ હોય, તો ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

નોંધ : $\angle A + \angle C = 180°$ પરથી $\angle B + \angle D = 180°$ આપોઆપ મળે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

2. આપેલ આકૃતિમાં, વર્તુળનો વ્યાસ AB છે. વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપની બરાબર જીવા CD છે. AC અને BDને લંબાવતાં તે બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\angle AEB = 60°$.



OC, OD અને BC જોડો.

ત્રિકોણ ODC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(OC = OD = CD = ત્રિજ્યા)

માટે, $\angle COD = 60°$

હવે, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (પ્રમેય 9.7)

તે પરથી, $\angle CBD = 30°$ થાય.

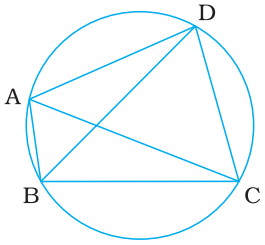
ફરીથી, $\angle ACB = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આથી $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

તે પરથી, $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$,

એટલે કે, $\angle AEB = 60°$ થાય.

3. આપેલ આકૃતિમાં, ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને AC તથા BD તેના વિકર્ણો છે. જો $\angle DBC = 55°$ અને $\angle BAC = 45°$, તો $\angle BCD$ શોધો.



$\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

આથી $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

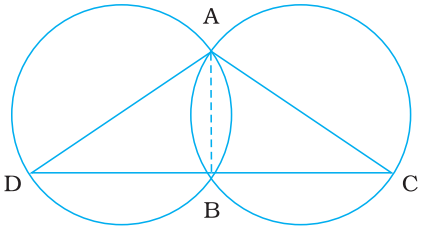
$= 55° + 45° = 100°$

પરંતુ, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$

(ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

આથી $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$

4. બે વર્તુળો બે બિંદુઓ A અને Bમાં છેદે છે. આ બે વર્તુળોના વ્યાસ AD અને AC છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, B એ રેખાખંડ DC પર આવેલું છે.



AB જોડો.

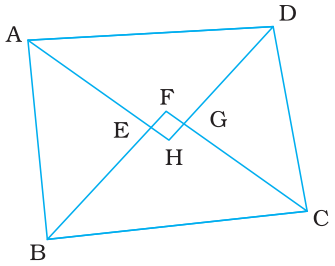
$\angle ABD = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

$\angle ABC = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આથી $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

માટે, DBC એક રેખા છે. એટલે કે, રેખાખંડ DC પર B આવેલું છે.

5. સાબિત કરો કે જો કોઈ પણ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓના દુભાજકો વડે ચતુષ્કોણ બને (શક્ય હોય), તો તે ચક્રીય છે.



આકૃતિમાં ચતુષ્કોણ ABCDના અંદરના ખૂણાઓ A, B, C અને Dના દુભાજકો અનુક્રમે AH, BF, CF અને DH છે. તે ચતુષ્કોણ EFGH રચે છે.

હવે, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$

(અભિકોણ તથા ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 180° - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)$

હવે, $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$

(અભિકોણ તથા ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 180° - \frac{1}{2} (\angle C + \angle D)$

આથી

$\angle FEH + \angle FGH$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

$= 360° - \frac{1}{2} \times 360°$

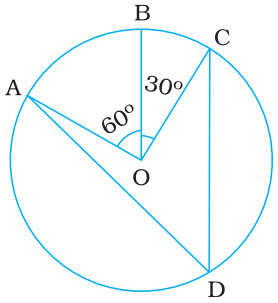
$= 360° - 180°$

$= 180°$

માટે, પ્રમેય 9.11 પરથી ચતુષ્કોણ EFGH ચક્રીય છે.

સ્વાધ્યાય 9.3 | પાના નં. 112 – 113

1. આપેલ આકૃતિમાં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર બિંદુઓ A, B અને C એવી રીતે આવેલાં છે કે જેથી $\angle BOC = 30°$ અને $\angle AOB = 60°$ થાય. જો ચાપ ABC સિવાયના વર્તુળ પર બિંદુ D હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.



$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ (આસન્નકોણ)

$\therefore \angle AOC = 60° + 30°$

$\therefore \angle AOC = 90°$

હવે, $2\angle ADC = \angle AOC$ (પ્રમેય 9.7)

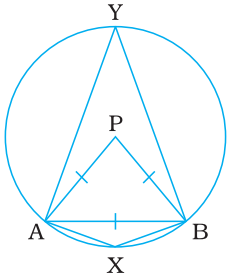
$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \times 90°$

$\therefore$ **$\angle ADC = 45°$**

2. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા શોધો.

O કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવા AB અને ત્રિજ્યા PA સમાન છે.



$\therefore \Delta PAB$માં $PA = PB = AB$

$\therefore \Delta PAB$ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

$\therefore \angle APB = 60°$

હવે, $2\angle AYB = \angle APB$ (પ્રમેય 9.7)

$\therefore \angle AYB = \frac{1}{2}\angle APB = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$

ચતુષ્કોણ AXBY ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

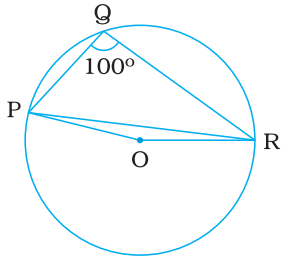
$\therefore \angle X + \angle Y = 180°$ (પ્રમેય 9.10)

$\therefore \angle X + 30° = 180°$

$\therefore \angle X = 150°$

આમ, લઘુચાપ પરના બિંદુ X આગળ આંતરેલો ખૂણો **150°** છે અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ Y આગળ આંતરેલો ખૂણો **30°** છે.

3. આપેલ આકૃતિમાં $\angle PQR = 100°$; જ્યાં P, Q અને R એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે. $\angle OPR$ શોધો.



અહીં વિપરીતકોણ $\angle POR = 2 \times \angle PQR$ (પ્રમેય 9.7)

$\therefore$ વિપરીતકોણ $\angle POR = 2 \times 100° = 200°$

હવે, $\angle POR +$ વિપરીતકોણ $\angle POR = 360°$

$\therefore \angle POR + 200° = 360°$

$\therefore \angle POR = 160°$

ΔOPRમાં $OP = OR$ (ત્રિજ્યાઓ)

$\therefore \angle OPR = \angle ORP$

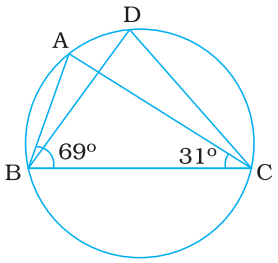
ΔOPRમાં $\angle OPR + \angle ORP + \angle POR = 180°$

$\therefore \angle OPR + \angle OPR + 160° = 180°$

$\therefore 2\angle OPR = 20°$

$\therefore$ **$\angle OPR = 10°$**

4. આપેલ આકૃતિમાં $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ છે, $\angle BDC$ શોધો.



ΔABCમાં, $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$

$\therefore 69° + 31° + \angle BAC = 180°$

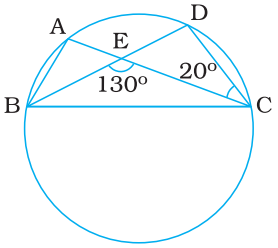
$\therefore 100° + \angle BAC = 180°$

$\therefore \angle BAC = 80°$

હવે, $\angle BDC = \angle BAC$ (પ્રમેય 9.8)

$\therefore \angle$ **BDC = 80°**

5. આપેલ આકૃતિમાં વર્તુળ પર ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D આવેલાં છે. AC અને BD એ E બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી $\angle BEC = 130°$ અને $\angle ECD = 20°$. $\angle BAC$ શોધો.



ΔCDEમાં $\angle BEC$ બહિષ્કોણ છે.

$\therefore \angle BEC = \angle ECD + \angle EDC$

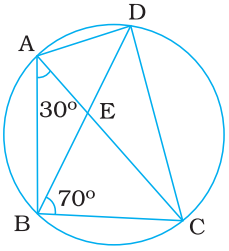
$\therefore 130° = 20° + \angle BDC$

$\therefore \angle BDC = 110°$

હવે, $\angle BAC = \angle BDC$ (પ્રમેય 9.8)

$\therefore \angle$ **BAC = 110°**

6. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો E બિંદુએ છેદે છે. જો $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$, તો $\angle BCD$ શોધો અને જો AB = BC, તો $\angle ECD$ શોધો.



$\angle DAC = \angle DBC$ (પ્રમેય 9.8)

$\therefore \angle DAC = 70°$

$\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC$ (આસન્નકોણ)

$\therefore \angle BAD = 30° + 70°$

$\therefore \angle BAD = 100°$

ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં,

$\angle BAD + \angle BCD = 180°$ (પ્રમેય 9.10)

$\therefore 100° + \angle BCD = 180°$

$\therefore \angle$ **BCD = 80°**

ΔABCમાં AB = BC હોય, તો $\angle BAC = \angle BCA$

$\therefore 30° = \angle BCA$

$\therefore \angle BCA = 30°$

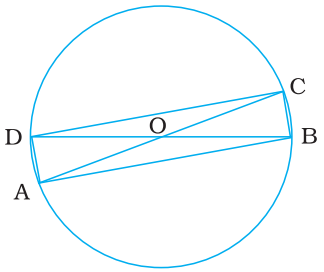
$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$ (આસન્નકોણ)

$\therefore 80° = 30° + \angle ACD$

$\therefore \angle ACD = 50°$

$\therefore \angle$ **ECD = 50°**

7. જો ચક્રીય ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના વ્યાસ હોય, તો સાબિત કરો કે તે લંબચોરસ છે.



ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDનાં બિંદુઓ O કેન્દ્રિત વર્તુળ પર આવેલાં છે તથા AC અને BD તે વર્તુળના વ્યાસ છે.

AC વ્યાસ હોવાથી $\angle ABC = \angle ADC = 90°$

(અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

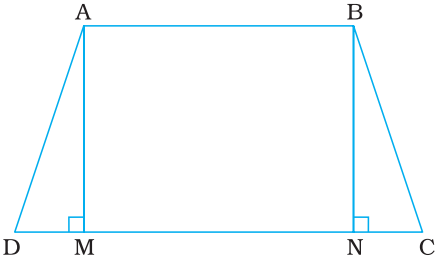
BD વ્યાસ હોવાથી $\angle BCD = \angle BAD = 90°$

(અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આમ, ચતુષ્કોણ ABCDના ચારેય ખૂણા $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ અને $\angle ADC$ કાટખૂણા છે.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.

8. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.



સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB ∥ CD અને AD = BC.

A અને Bમાંથી CD પર અનુક્રમે લંબ AM તથા BN દોરો.

ΔAMD અને ΔBNCમાં

$\angle AMD = \angle BNC$ (કાટખૂણા)

કર્ણ AD = કર્ણ BC (પક્ષ)

$AM = BN$ (બે સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર)

$\therefore$ કાકબા મુજબ, $\Delta AMD \cong \Delta BNC$

$\therefore \angle ADM = \angle BCN$ (CPCT)

$\therefore \angle ADC = \angle BCD$

હવે, $AB \parallel CD$ અને AD તેમની છેદિકા છે.

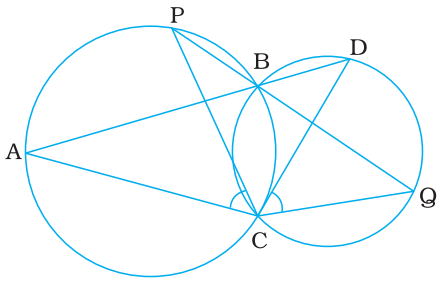
$\therefore \angle BAD + \angle ADC = 180°$ (છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ)

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180°$

આમ, ચતુષ્કોણ $ABCD$માં $\angle A + \angle C = 180°$

માટે, ચતુષ્કોણ $ABCD$ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

9. **બે વર્તુળો એકબીજાને બે બિંદુઓ B અને Cમાં છેદે છે. Bમાંથી પસાર થતાં બે રેખાખંડ ABD અને PBQ વર્તુળોને અનુક્રમે A, D અને P, Qમાં છેદે તે રીતે દોરેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ) સાબિત કરો કે, $\angle ACP = \angle QCD$.**



$\angle ACP$ અને $\angle ABP$ એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણા છે.

$\therefore \angle ACP = \angle ABP$ (પ્રમેય 9.8) ... ... (1)

$\angle QCD$ અને $\angle QBD$ એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણા છે.

$\therefore \angle QCD = \angle QBD$ (પ્રમેય 9.8) ... ... (2)

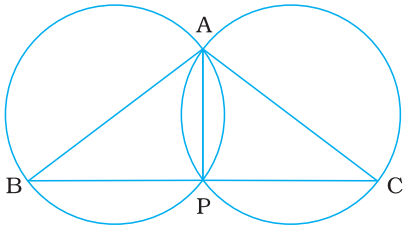
વળી, $\angle ABP$ અને $\angle QBD$ અભિકોણ છે.

$\therefore \angle ABP = \angle QBD$ ... ... (3)

(1), (2) અને (3) પરથી,

$\angle ACP = \angle QCD$

10. **જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ વ્યાસ થાય તેવી રીતે વર્તુળો દોરેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળોનું એક છેદબિંદુ ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર આવેલું છે.**



ΔABCની બાજુઓ AB અને AC વ્યાસ થાય તે રીતે વર્તુળો દોરેલ છે, જે એકબીજાને A અને P બિંદુમાં છેદે છે.

સામાન્ય જીવા AP દોરો.

AB વ્યાસ હોવાથી $\angle APB$ અર્ધવર્તુળે આંતરેલો ખૂણો છે.

$\therefore \angle APB = 90°$

AC વ્યાસ હોવાથી $\angle APC$ અર્ધવર્તુળે આંતરેલો ખૂણો છે.

$\therefore \angle APC = 90°$

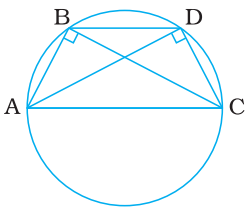
આથી $\angle APB + \angle APC = 90° + 90° = 180°$

$\angle APB$ અને $\angle APC$ સામાન્ય ભુજ AP ધરાવતા આસન્નકોણ છે અને તેમનો સરવાળો $180°$ છે.

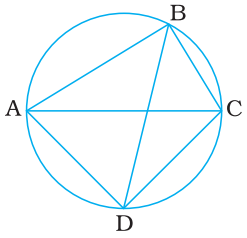
$\therefore \angle APB$ અને $\angle APC$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે.

$\therefore$ બિંદુ P એ ΔABCની ત્રીજી બાજુ BC પર આવેલું છે.

11. **કર્ણ AC હોય તેવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ADC છે. સાબિત કરો કે, $\angle CAD = \angle CBD$.**



આકૃતિ (1)



આકૃતિ (2)

આકૃતિ (1)માં રેખાખંડ AC રેખાની એક જ તરફ આવેલાં બિંદુઓ B અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે. આથી પ્રમેય 9.9 મુજબ ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.

હવે, $\angle CAD$ અને $\angle CBD$ એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણા છે.

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$ (પ્રમેય 9.8)

આકૃતિ (2)માં ચતુષ્કોણ $ABCD$માં $\angle B = \angle D = 90°$

એટલે કે, $\angle B + \angle D = 180°$

માટે, $ABCD$ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

અહીં, $\angle CAD$ અને $\angle CBD$ એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણા છે.

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$ (પ્રમેય 9.8)

12. સાબિત કરો કે, ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

ચતુષ્કોણ ABCD ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

અને $\angle B + \angle D = 180°$ ... ... (1)

ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore \angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$ ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

આમ, ચતુષ્કોણ ABCDના ચારેય ખૂણા કાટખૂણા છે.

માટે, ABCD લંબચોરસ છે.

આમ, ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. જો AD ∥ BC અને $\angle B = 70°$ હોય, તો ABCDના બાકીના ખૂણા શોધો.

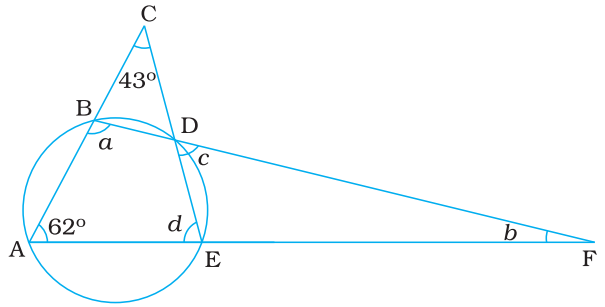
2. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD બિંદુ Pમાં છેદે છે. જો $\angle DBC = 70°$ અને $\angle BAC = 30°$ હોય, તો $\angle BCD$ શોધો.

3. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB વ્યાસ છે અને ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. જો $\angle ADC = 140°$ હોય, તો $\angle BAC$ શોધો.

4. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં AD ∥ BC છે. સાબિત કરો કે, AB = CD.

5. Δ ABCમાં AB = AC છે. ABને વ્યાસ લઈને દોરેલ વર્તુળ BCને Dમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, D એ BCનું મધ્યબિંદુ છે.

6. આપેલ આકૃતિમાં જો $\angle BCD = 43°$ અને $\angle BAE = 62°$ હોય, તો a, b, c અને dની કિંમતો શોધો.



7. P કેન્દ્રિત વર્તુળની ત્રિજ્યા 20 સેમી છે. AB એ P કેન્દ્રિત વર્તુળની એક જીવા છે. જો AB = 32 સેમી હોય, તો ABનું Pથી અંતર શોધો.

8. Δ ABCમાં AB = AC છે. B અને Cમાંથી પસાર થતું એક વર્તુળ AB અને ACને અનુક્રમે X અને Yમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, XY ∥ BC.

9. ત્રિકોણ ABCના ખૂણાઓ A, B અને Cના દુભાજકો, ત્રિકોણના પરિવર્તુળને અનુક્રમે D, E અને Fમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે, ત્રિકોણ DEFના ખૂણાઓ $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ અને $90° - \frac{1}{2}C$ છે.

જવાબો : 1. $\angle A = 110°$, $\angle C = 70°$, $\angle D = 110°$

2. 80°

3. 50°

6. $a = 105°$, $b = 13°$, $c = 62°$, $d = 75°$

7. 12 સેમી

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) વર્તુળનું કેન્દ્ર વર્તુળના દરેક બિંદુથી ..... અંતરે હોય છે. *(મહત્તમ, લઘુતમ, સમાન)*

(2) વર્તુળની પૂર્ણ લંબાઈને વર્તુળનો ..... કહે છે. *(ચાપ, જીવા, પરિઘ)*

(3) વર્તુળની કોઈ પણ ત્રિજ્યાનું માપ તેના વ્યાસ કરતાં ..... હોય. *(બમણું, અડધું, અધિક)*

(4) વર્તુળના ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓ કદી પણ ..... ન હોય. *(સમરેખ, અસમરેખ, ગુરુકોણ પરનાં બિંદુઓ)*

(5) વર્તુળનાં બે ભિન્ન બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડને વર્તુળની ..... કહે છે. *(ત્રિજ્યા, જીવા, ચાપ)*

(6) ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા ..... હોય. *(કોટિકોણ, પૂરકકોણ, સમાન)*

(7) ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ..... છે. *(ચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ)*

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ એક સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) AB અને CD એ P કેન્દ્રિત વર્તુળની સમાન જીવાઓ છે. જો $\angle APB = 85°$ હોય, તો $\angle CPD$ શોધો.

(2) P કેન્દ્રિત વર્તુળની સૌથી મોટી જીવા ABનું માપ 15 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

(3) P કેન્દ્રિત વર્તુળની AB જીવા છે અને C એ ગુરુચાપનું બિંદુ છે. જો $\angle ACB = 42°$ હોય, તો $\angle APB$ શોધો.

(4) ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A : \angle C = 4 : 5$ હોય, તો $\angle C$ શોધો.

(5) ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDની બાજુ ABને B તરફ M સુધી લંબાવેલ છે. જો $\angle CBM = 100°$ હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.

(6) P કેન્દ્રિત વર્તુળની AB જીવા છે અને C એ ગુરુચાપનું બિંદુ છે. જો $\angle ACB + \angle APB = 135°$ હોય, તો $\angle ACB$ શોધો.

(7) ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં જો $\angle A = (3x + 20)°$ અને $\angle C = (2x + 10)°$ હોય, તો x શોધો.

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) P કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવા ABની લંબાઈ 16 સેમી છે અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર 15 સેમી છે, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા ..... સેમી હોય.

A. 20 B. 22 C. 14 D. 17

(2) O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB જીવા છે. જો $\angle AOB = 60°$ હોય, તો ΔOAB ..... ત્રિકોણ છે.

A. સમદ્વિભુજ B. સમભુજ C. કાટકોણ D. વિષમભુજ

(3) AB વ્યાસવાળા વર્તુળ પર બિંદુ P છે. જો ΔPABમાં $\angle A = 48°$ હોય, તો $\angle B =$ ..... .

A. 48° B. 96° C. 42° D. 24°

(4) P કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવાઓ AB અને CD કાટખૂણે બિંદુ Mમાં છેદે છે. જો $\angle MAD = 55°$ હોય, તો $\angle ABC =$ ..... .

A. 35° B. 55° C. 110° D. 45°

(5) ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D =$ ..... શક્ય છે.

A. 2 : 3 : 2 : 3 B. 4 : 5 : 6 : 3

C. 3 : 4 : 6 : 5 D. 4 : 6 : 3 : 5

(6) ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A : \angle C = 17 : 19$ હોય, તો $\angle A =$ ..... .

A. 85° B. 95° C. 80° D. 100°

(7) P કેન્દ્રિત વર્તુળની AB જીવા છે અને C એ ગુરુચાપનું બિંદુ છે. જો $\angle ACB + \angle APB = 210°$ હોય, તો $\angle APB =$ ..... .

A. 105° B. 70° C. 140° D. 80°

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) વર્તુળની જીવાનાં તમામ બિંદુઓ વર્તુળ પર હોય.

(2) ચક્રીય ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણા પૂરક હોય છે.

(3) એક જ વર્તુળની બે અસમાન જીવાઓ પૈકી નાની જીવા કેન્દ્રથી નજીક હોય.

(4) વર્તુળમાં અંતર્ગત સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય.

(5) એક જ વર્તુળની બે જીવાઓ પરસ્પર દુભાગે, તો તે બંને વ્યાસ હોય.

(6) વર્તુળમાં અંતર્ગત સમબાજુ ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય.

(7) ચક્રીય ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ ખૂણો ગુરુકોણ ન હોઈ શકે.

5. P કેન્દ્રિત વર્તુળની AB જીવા છે અને C એ ગુરુચાપનું બિંદુ છે. તે સંદર્ભે યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. જો PA = 10 સેમી અને AB = 16 સેમી હોય, તો ABનું Pથી અંતર = ... સેમી	a. 40
2. જો $\angle ACB = 70°$ હોય, તો $\angle APB =$ .....°	b. 25
3. જો $\angle APB = 50°$ હોય, તો $\angle ACB =$ .....°	c. 13
4. જો $\angle APB + \angle ACB = 120°$ હોય, તો $\angle ACB =$ .....°	d. 6
5. જો AB = 10 સેમી અને ABનું Pથી અંતર = 12 સેમી હોય, તો PA = ... સેમી	e. 100
6. જો $\angle APB + \angle ACB = 195°$ હોય, તો $\angle APB =$ .....°	f. 140
	g. 20
	h. 130

જવાબો

1. (1) સમાન (2) પરિઘ (3) અડધું (4) સમરેખ (5) જીવા (6) પૂરકકોણ (7) લંબચોરસ

2. (1) 85° (2) 7.5 સેમી (3) 84° (4) 100° (5) 100° (6) 45° (7) 30

3. (1) D. 17 (2) B. સમભુજ (3) C. 42° (4) A. 35° (5) C. 3 : 4 : 6 : 5 (6) A. 85° (7) C. 140°

4. (1) ખોટું (2) ખોટું (3) ખોટું (4) ખોટું (5) ખરું (6) ખરું (7) ખોટું

5. 1 → d, 2 → f, 3 → b, 4 → a, 5 → c, 6 → h.

10 હેરોનનું સૂત્ર
(HERON'S FORMULA)

યાદ રાખો

* **ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ :** ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે વપરાતા નીચેનાં સૂત્રથી આપણે પરિચિત છીએ :

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

ચોક્કસ પ્રકારના ત્રિકોણ માટે આ જ સૂત્ર બીજા સ્વરૂપે રજૂ થઈ શકે છે. જેમ કે કાટકોણ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ માટે નીચે મુજબ સૂત્ર લઈ શકાય :

કાટકોણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{1}{2} \times$ કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓનો ગુણાકાર

સમબાજુ ત્રિકોણ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગ દ્વારા વેધ શોધીએ, તો સૂત્ર નીચે મુજબના સ્વરૂપમાં ફેરવાય :

સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{બાજુ})^2$

સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં પણ જો ત્રણ બાજુનાં માપ જાણતા હોઈએ, તો પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી વેધનું માપ જાણી શકાય અને મૂળ સૂત્રનો ઉપયોગ થઈ શકે. પરંતુ, વિષમબાજુ ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુના માપ જાણતા હોઈએ તોપણ વેધનું માપ શોધી ન શકીએ.

* **હેરોનનું સૂત્ર :** કોઈ પણ પ્રકારના કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓનાં માપ જાણતા હોઈએ તો તે પરથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર હેરોન નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ આપ્યું છે.

હેરોનનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે :

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

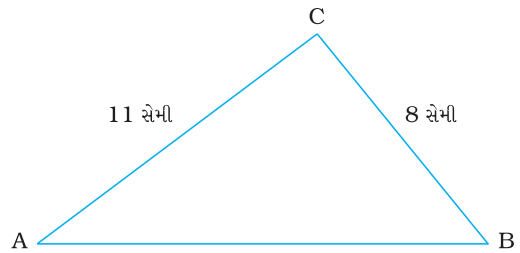
જ્યાં, a, b અને c ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં માપ દર્શાવે છે અને $s = \frac{a+b+c}{2}$ એ ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ છે.

* **ક્ષેત્રફળના એકમ :** કોઈ સમતલ આકૃતિના ક્ષેત્રફળનો એકમ ચોરસ મીટર (મી^{2}) અથવા ચોરસ સેન્ટિમીટર (સેમી^{2}) વગેરે લખાય. જમીનના નાના-મોટા પ્લૉટનું ક્ષેત્રફળ હેક્ટરમાં લખાય છે.

1 હેક્ટર $= 10{,}000$ મી^{2}

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. એક ત્રિકોણની પરિમિતિ 32 સેમી અને બે બાજુ 8 સેમી અને 11 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ)



અહીં, ત્રિકોણની પરિમિતિ $= 32$ સેમી, $a = 8$ સેમી અને $b = 11$ સેમી.

ત્રીજી બાજુ $c = 32$ સેમી $- (8 + 11)$ સેમી $= 13$ સેમી

અહીં, $2s = 32$, અર્થાત્ $s = 16$ સેમી

$s - a = (16 - 8)$ સેમી $= 8$ સેમી

$s - b = (16 - 11)$ સેમી $= 5$ સેમી

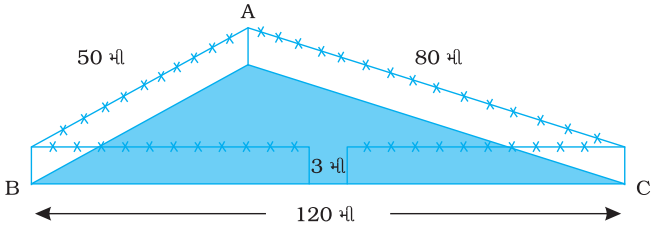
$s - c = (16 - 13)$ સેમી $= 3$ સેમી

આથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ સેમી^{2}

$= \mathbf{8\sqrt{30}}$ **સેમી^{2}**

2. એક ત્રિકોણાકાર બગીચા ABCની બાજુઓ 120 મી, 80 મી અને 50 મી છે. (જુઓ આકૃતિ) ઘનિયા માળીએ બધી જ તરફ તારની વાડ બાંધવાની છે અને અંદર તરફ ઘાસ વાવવાનું છે. તેને કેટલા ક્ષેત્રફળમાં વાવણી કરવાની રહેશે? તે એક બાજુએ 3 મીટર પહોળી જગ્યા દરવાજા માટે છોડે છે, તો તેની ફરતે કાંટાળી વાડ કરવા માટે ₹ 20 પ્રતિમીટરના ભાવે થતો ખર્ચ શોધો.



બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધવા,

$2s = 50$ મી $+ 80$ મી $+ 120$ મી $= 250$ મી

અર્થાત્ $s = 125$ મી

હવે, $s - a = (125 - 120)$ મી $= 5$ મી

$s - b = (125 - 80)$ મી $= 45$ મી

$s - c = (125 - 50)$ મી $= 75$ મી

આથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ મી^{2}

$= \mathbf{375\sqrt{15}}$ **મી^{2}**

વળી, બગીચાની પરિમિતિ $= AB + BC + CA = 250$ મી

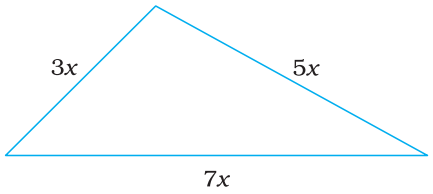
આથી વાડ બનાવવા માટે જરૂરી લંબાઈ

$= 250$ મી $- 3$ મી (દરવાજા માટે છોડેલ)

$= 247$ મી અને

આથી વાડ માટે થતો ખર્ચ $=$ ₹ $20 \times 247 =$ **₹ 4940**

3. એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની બાજુઓની લંબાઈ **3 : 5 : 7**ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ **300** મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



ધારો કે, બાજુઓ (મીટરમાં) $3x$, $5x$ અને $7x$ છે.

(જુઓ આકૃતિ)

આથી $3x + 5x + 7x = 300$ (ત્રિકોણની પરિમિતિ)

માટે, $15x = 300$. અર્થાત્ $x = 20$.

આથી ત્રિકોણની બાજુઓ 3×20 મી, 5×20 મી અને 7×20 મી થાય. અર્થાત્ 60 મી, 100 મી અને 140 મી થાય.

અહીં, $s = \frac{60 + 100 + 140}{2}$ મી $= 150$ મી

અને આથી ક્ષેત્રફળ

$= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}$ મી^{2}

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ મી^{2}

$= \mathbf{1500\sqrt{3}}$ **મી^{2}**

સ્વાધ્યાય 10.1 | પાના નં. 118

1. જેની બાજુની લંબાઈ **'a'** હોય તેવા સમબાજુ ત્રિકોણ આકારના ટ્રાફિક સિગ્નલના પાટિયામાં **'SCHOOL AHEAD'** એમ લખેલ છે, તો આ પાટિયાનું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્ર પરથી મેળવો. જો તેની પરિમિતિ **180** સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય?

ધારો કે, ΔABC એ સમબાજુ ત્રિકોણ આકારનું ટ્રાફિક સિગ્નલ દર્શાવે છે.

સમબાજુ ΔABCમાં દરેક બાજુની લંબાઈ a છે.

$\therefore a = a,\ b = a,\ c = a$

અને અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3}{2}a$

હવે, $s - a = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$,

$s - b = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$ અને

$s - c = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{\frac{3}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a}$

$= \sqrt{\frac{3}{16}a^4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ **(બાજુ)^2**

હવે, સમબાજુ ΔABCની પરિમિતિ 180 સેમી છે.

$\therefore$ દરેક બાજુની લંબાઈ $= \frac{180}{3} = 60$ સેમી અને

અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{180}{2} = 90$ સેમી.

અહીં, $a = b = c = 60$ સેમી અને $s = 90$ સેમી

$\therefore s - a = 90 - 60 = 30$ સેમી,

$s - b = 90 - 60 = 30$ સેમી અને

$s - c = 90 - 60 = 30$ સેમી

ΔABCનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{90 \times 30 \times 30 \times 30}$ સેમી^{2}

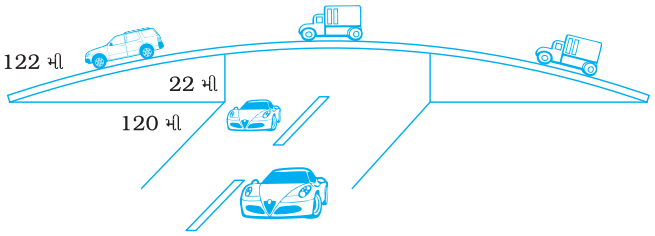
$= \sqrt{3 \times 900 \times 900}$ સેમી^{2}

$= 30 \times 30 \times \sqrt{3}$ સેમી^{2}

$= 900\sqrt{3}$ સેમી^{2}

આમ, સમબાજુ ત્રિકોણાકાર ટ્રાફિક સિગ્નલના પાટિયાનું ક્ષેત્રફળ **$900\sqrt{3}$ સેમી^{2}** છે.

2. એક ફ્લાયઓવરની ત્રિકોણાકાર દીવાલોનો ઉપયોગ જાહેરાત માટે કરવામાં આવે છે. આ દીવાલોની બાજુઓ **122** મી, **22** મી અને **120** મી છે. (જુઓ આકૃતિ) જાહેરાત પ્રતિવર્ષ ₹ **5000** પ્રતિ મી^{2}ના દરે કમાણી કરી આપે છે. એક કંપની તે દીવાલોમાંની એક **3** મહિના માટે ભાડે રાખે છે, તો તેણે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડે?



ત્રિકોણાકાર દીવાલ માટે $a = 122$ મી, $b = 120$ મી અને $c = 22$ મી.

અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{122+120+22}{2}$

$= \frac{264}{2}$

$= 132$ મી

ત્રિકોણાકાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{132(132-122)(132-120)(132-22)}$ મી^{2}

$= \sqrt{132\times10\times12\times110}$ મી^{2}

$= \sqrt{12\times11\times10\times12\times11\times10}$ મી^{2}

$= 12 \times 11 \times 10$ મી^{2}

$= 1320$ મી^{2}

∴ એક દીવાલનો જાહેરાતનો વાર્ષિક ખર્ચ

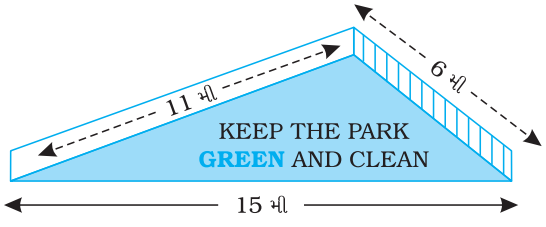
= ₹ (1320×5000)

∴ એક દીવાલનો જાહેરાતનો 3 મહિનાનો ખર્ચ

$= ₹\left(1320 \times 5000 \times \frac{3}{12}\right)$

$=$ **₹16,50,000**

3. બગીચામાં એક લપસણી છે. તેની એક બાજુની દીવાલ કોઈક રંગથી રંગી તેના પર **"KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN"** એવો સંદેશ લખેલ છે. (જુઓ આકૃતિ) જો દીવાલની બાજુઓ **15** મી, **11** મી અને **6** મીની હોય, તો રંગેલ દીવાલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



ત્રિકોણાકાર દીવાલની બાજુઓની લંબાઈ 15 મી, 11 મી અને 6 મી છે.

∴ $a = 15$ મી, $b = 11$ મી, $c = 6$ મી અને

અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+11+6}{2} = \frac{32}{2} = 16$ મી

તેથી $s-a = 16-15 = 1$ મી, $s-b = 16-11 = 5$ મી, અને $s-c = 16-6 = 10$ મી

રંગેલ ત્રિકોણાકાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16\times1\times5\times10}$ મી^{2}

$= \sqrt{16\times5\times5\times2}$ મી^{2}

$= 4 \times 5 \times \sqrt{2}$ મી^{2}

$=$ **$20\sqrt{2}$ મી^{2}**

4. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ **42** સેમી અને બે બાજુઓ **18** સેમી તથા **10** સેમીની હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અહીં, ત્રિકોણની પરિમિતિ = 42 સેમી

∴ અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{42}{2} = 21$ સેમી

વળી, $a = 18$ સેમી અને $b = 10$ સેમી

$s = \frac{a+b+c}{2}$

∴ $21 = \frac{18+10+c}{2}$

∴ $42 = 28 + c$

∴ $c = 14$

હવે, $s-a = 21-18 = 3$ સેમી,

$s-b = 21-10 = 11$ સેમી અને

$s-c = 21-14 = 7$ સેમી.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21\times3\times11\times7}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{21\times21\times11}$ સેમી^{2}

$=$ **$21\sqrt{11}$ સેમી^{2}**

5. ત્રિકોણની બાજુઓ **12 : 17 : 25**ના પ્રમાણમાં હોય અને તેની પરિમિતિ **540** સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ધારો કે, ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ (સેમીમાં) $12x$, $17x$ અને $25x$ છે.

ત્રિકોણની પરિમિતિ = ત્રણેય બાજુઓનો સરવાળો

∴ $540 = 12x + 17x + 25x$

∴ $540 = 54x$

∴ $x = 10$

આથી ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ,

$a = 12 \times 10 = 120$ સેમી,

$b = 17 \times 10 = 170$ સેમી અને

$c = 25 \times 10 = 250$ સેમી મળે.

અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{\text{પરિમિતિ}}{2} = \frac{540}{2} = 270$ સેમી

હવે, $s-a = 270-120 = 150$ સેમી,

$s-b = 270-170 = 100$ સેમી અને

$s-c = 270-250 = 20$ સેમી.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270(150)(100)(20)}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{270\times30\times5\times100\times5\times4}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{8100 \times 25 \times 400}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{(90)^2 \times (5)^2 \times (20)^2}$ સેમી^{2}

$= 90 \times 5 \times 20$ સેમી^{2}

$=$ **9000 સેમી^{2}**

6. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 30 સેમી અને સમાન બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 12 સેમી છે, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અહીં, ત્રિકોણની બાજુઓ $a = 12$ સેમી, $b = 12$ સેમી અને $c = c$ સેમી છે.

ત્રિકોણની પરિમિતિ = ત્રણ બાજુઓનો સરવાળો

$\therefore 30 = 12 + 12 + c$

$\therefore 30 = 24 + c$

$\therefore c = 6$ સેમી

હવે, અર્ધપરિમિતિ $s = \frac{\text{પરિમિતિ}}{2} = \frac{30}{2} = 15$ સેમી

તે પરથી, $s - a = 15 - 12 = 3$ સેમી,

$s - b = 15 - 12 = 3$ સેમી અને

$s - c = 15 - 6 = 9$ સેમી.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15 \times 3 \times 3 \times 9}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{15 \times 9 \times 9}$ સેમી^{2}

$=$ **$9\sqrt{15}$ સેમી^{2}**

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. Δ PQR સમભુજ ત્રિકોણ છે. જો PQ = 10 સેમી હોય, તો Δ PQRનું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્રથી મેળવો.

2. એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 20 સેમી, 30 સેમી અને 40 સેમી છે, તો આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. એક સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 54 સેમી છે, તો આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્રથી મેળવો.

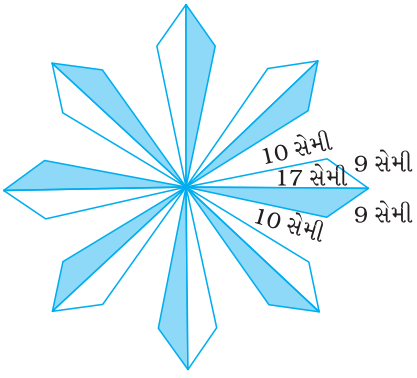
4. એક ત્રિકોણની બાજુઓ 4 : 2 : 3ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 36 સેમી છે. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણાકાર ખેતરની બે એકરૂપ બાજુઓનાં માપ 30 મી છે તથા બાકીની બાજુનું માપ 20 મી છે, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

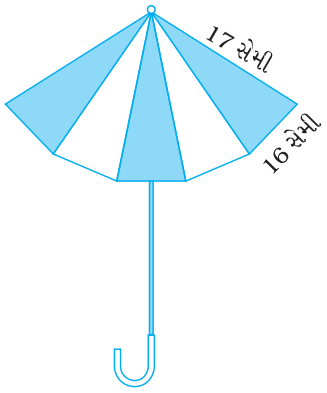
6. એક ત્રિકોણની બાજુઓ 13 : 14 : 15ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 84 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. Δ ABCમાં AB = 20 સેમી, BC = 21 સેમી અને Δ ABCની પરિમિતિ = 70 સેમી છે, તો Δ ABCનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

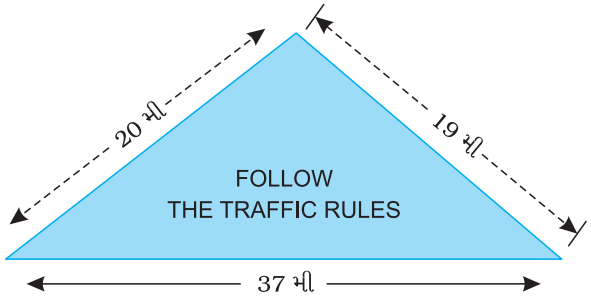
8. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ફ્લોર પર 16 ત્રિકોણાકાર લાદીથી બનેલી ડિઝાઇન કરેલી છે. ડિઝાઇનમાં ત્રિકોણની દરેક બાજુ 9 સેમી, 10 સેમી અને 17 સેમી છે. 50 પૈસા પ્રતિ સેમી^{2}ના દરે લાદીને પૉલિશ કરવાની કિંમત શોધો.



9. 17 સેમી, 17 સેમી અને 16 સેમીના દરેક ટુકડાના બે અલગ અલગ ડિઝાઇનના કાપડના 14 ત્રિકોણાકાર ટુકડાને ટાંકા કરીને છત્રી બનાવવામાં આવે છે. છત્રી માટે દરેક ડિઝાઇનના કેટલા કાપડની જરૂર છે?



10. 'FOLLOW THE TRAFFIC RULES'ના સંદેશ સાથે કાળા રંગમાં રંગાયેલા બુદ્ધ પાર્કની બાજુની દીવાલ ત્રિકોણાકાર છે. (જુઓ આકૃતિ) જો દીવાલની બાજુઓ 19 મી, 20 મી અને 37 મીની હોય, તો રંગેલ દીવાલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



11. રાકેશભાઈ પાસે એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારનું ખેતર છે. તેમણે પોતાનું ખેતર અનાથાશ્રમ અને વૃદ્ધાશ્રમને સમાન રીતે દાન કરવાનું નક્કી કર્યું. ખેતરની પરિમિતિ 400 મીટર છે અને એક વિકર્ણ 160 મીટર છે, તો અનાથાશ્રમના ભાગમાં આવેલ ખેતરના ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ જણાવો.

જવાબો : **1.** $25\sqrt{3}$ સેમી^{2} **2.** $75\sqrt{15}$ સેમી^{2} **3.** $81\sqrt{3}$ સેમી^{2} **4.** $12\sqrt{15}$ સેમી^{2} **5.** $200\sqrt{2}$ મી^{2} **6.** 336 સેમી^{2} **7.** 210 સેમી^{2} **8.** ₹ 288 **9.** 840 સેમી^{2} **10.** 114 મી^{2} **11.** 4800 મી^{2}

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) એક સમબાજુ ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ 18 સેમી છે, તો તેની બાજુનું માપ ..... સેમી હોય.

(12, 36, 6)

(2) લંબચોરસ ABCDમાં AB = 42 સેમી અને BC = 18 સેમી હોય, તો ar (ABCD) = ... સેમી^{2}.

(120, 756, 567)

(3) એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપનું પ્રમાણ 4 : 5 : 8 છે અને તેની સૌથી નાની બાજુનું માપ 28 સેમી છે, તો તે ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ ..... સેમી થાય.

(119, 56, 59.5)

(4) એક ત્રિકોણની અર્ધપરિમિતિ 23 સેમી છે તથા તેની બે બાજુઓનાં માપ 13 સેમી અને 19 સેમી છે, તો તેની ત્રીજી બાજુનું માપ ..... સેમી હોય.

(46, 14, 12)

(5) એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 12 સેમી, 16 સેમી અને 20 સેમી છે, તો તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ..... સેમી^{2} થાય. *(96, 48, 24)*

(6) એક સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 8 સેમી^{2} હોય, તો તેના કર્ણનું માપ ..... સેમી થાય.

(4, $4\sqrt{2}$, 32)

(7) સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુનું માપ x સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ ..... સેમી^{2} થાય.

($\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $\sqrt{3}x^2$, $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$)

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) ΔPQRમાં PQ = 15 સેમી, QR = 20 સેમી અને PR = 25 સેમી હોય, તો ar (PQR) શોધો.

(2) ΔABC માટે a = 12 સેમી, b = 18 સેમી અને s = 25 સેમી હોય, તો c શોધો.

(3) ΔABCમાં AB = 12 સેમી, BC = 25 સેમી અને AC = 17 સેમી હોય, તો ar (ABC) શોધો.

(4) ΔABCમાં AB = AC = 10 સેમી અને BC = 12 સેમી હોય, તો ar (ABC) શોધો.

(5) ΔPQRમાં PQ = 13 સેમી, QR = 14 સેમી, PR = 15 સેમી અને ar (PQR) = 84 સેમી^{2} હોય, તો ત્રિકોણના સૌથી નાના વેધનું માપ શોધો.

(6) સમબાજુ ત્રિકોણમાં બાજુની લંબાઈ ત્રણ ગણી કરવાથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મૂળ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળથી કેટલું ગણું થાય?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) ΔABCમાં AB = 13 સેમી, BC = 14 સેમી અને AC = 15 સેમી હોય, તો ar (ABC) = ... સેમી^{2}.

A. 42 B. 84 C. 21 D. 63

(2) ΔABCમાં AB = 10 સેમી, BC = 16 સેમી અને AC = 20 સેમી હોય, તો તેની અર્ધપરિમિતિ ..... સેમી થાય.

A. 46 B. 36 C. 23 D. 18

(3) એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપનું પ્રમાણ 4 : 5 : 6 છે અને તેની અર્ધપરિમિતિ 90 સેમી છે, તો તે ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુનું માપ ..... સેમી છે.

A. 36 B. 60 C. 48 D. 72

(4) ΔABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને તેની અર્ધપરિમિતિ 30 સેમી છે. આથી ar (ABC) = ... સેમી^{2}.

A. $225\sqrt{3}$ B. $100\sqrt{3}$
C. $400\sqrt{3}$ D. $200\sqrt{3}$

(5) એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ a મી, b મી અને c મી છે તથા તેની અર્ધપરિમિતિ s મી છે. જો $s-a$ = 150 મી, $s-b$ = 75 મી અને $s-c$ = 25 મી હોય, તો s = ... મી.

A. 500 B. 250 C. 300 D. 520

(6) એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 12 સેમી, 17 સેમી અને 25 સેમી છે. જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 90 સેમી^{2} હોય, તો ત્રિકોણના સૌથી મોટા વેધનું માપ ..... સેમી થાય.

A. 15 B. 10.6 C. 18 D. 7.2

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુનું માપ 10 સેમી હોય, તો તેની અર્ધપરિમિતિ 15 સેમી થાય.

(2) ΔABCમાં $\angle$B = 90°, AB = 20 સેમી અને BC = 21 સેમી હોય, તો તેની અર્ધપરિમિતિ 70 સેમી થાય.

(3) એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની સમાન બાજુઓનાં માપ 20 સેમી હોય, તો તેની અર્ધપરિમિતિ 20 સેમી થાય.

(4) જો ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં માપ 15 સેમી, 36 સેમી અને 39 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ 270 સેમી^{2} થાય.

(5) ΔABCમાં AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી અને AC = 10 સેમી હોય, તો AC પરના વેધ BMની લંબાઈ 4.8 સેમી થાય.

(6) જે સમબાજુ ત્રિકોણની દરેક બાજુની લંબાઈ 10 સેમી હોય, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ વેધની લંબાઈ $4\sqrt{3}$ સેમી હોય.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. ΔABCમાં AB = 33 સેમી, BC = 34 સેમી અને AC = 65 સેમી હોય, તો s = ... સેમી.	a. $4\sqrt{3}$
2. ΔPQRમાં $\angle Q = 90°$, PQ = 3 સેમી, QR = 4 સેમી હોય, તો $ar(PQR)$ = ... સેમી^{2}.	b. 12
3. ΔABCમાં BC = 16 સેમી અને $ar(ABC) = 96$ સેમી^{2} હોય, તો બાજુ BC પરના વેધનું માપ ..... સેમી થાય.	c. 30
4. ΔABCમાં $a = 10$ સેમી, $b = 18$ સેમી અને $s = 21$ સેમી હોય, તો c = ... સેમી.	d. $2\sqrt{3}$
5. સમબાજુ ત્રિકોણ MNOમાં MN = 4 સેમી હોય, તો $ar(MNO)$ = ... સેમી^{2}.	e. 6
6. સમબાજુ ત્રિકોણ ABCની અર્ધપરિમિતિ 15 સેમી હોય, તો AB = ... સેમી.	f. 66
	g. 10
	h. 14

જવાબો

1. (1) 12 (2) 756 (3) 59.5 (4) 14 (5) 96 (6) $4\sqrt{2}$ (7) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

2. (1) 150 સેમી^{2} (2) 20 સેમી (3) 90 સેમી^{2} (4) 48 સેમી^{2} (5) 11.2 સેમી (6) 9 ગણું

3. (1) B. 84 (2) C. 23 (3) D. 72 (4) B. $100\sqrt{3}$ (5) B. 250 (6) A. 15

4. (1) ખરું (2) ખોટું (3) ખોટું (4) ખરું (5) ખરું (6) ખોટું

5. 1 → f, 2 → e, 3 → b, 4 → h, 5 → a, 6 → g.

11 પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ
(SURFACE AREAS AND VOLUMES)

યાદ રાખો

* **લંબવૃત્તીય શંકુ (Right circular cone) :** કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓ પૈકીની એક બાજુને ઘરી તરીકે લઈ તેની આસપાસ તે કાટકોણ ત્રિકોણને ઘુમાવતા અવકાશમાં જે ઘન આકૃતિ બને તેને લંબવૃત્તીય શંકુ કહે છે. જે શંકુમાં શિરોબિંદુને પાયાના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા પાયા સાથે કાટખૂણો બનાવતી ન હોય અથવા પાયો વર્તુળાકાર ન હોય તેને લંબવૃત્તીય શંકુ ન કહેવાય. આપણે માત્ર લંબવૃત્તીય શંકુનો જ અભ્યાસ કરવાના હોવાથી 'શંકુ'નો અર્થ 'લંબવૃત્તીય શંકુ' ગણીશું.
* શંકુને બે સપાટી હોય છે : એક વક્રસપાટી અને બીજી આધાર(પાયા)ની વર્તુળાકાર સપાટી. શંકુમાં ત્રણ માપ હોય છે : (1) આધારની ત્રિજ્યા r, (2) ઊંચાઈ h અને (3) તિર્યક (ત્રાંસી) ઊંચાઈ l. આ ત્રણેય માપ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ હોવાથી $l^2 = r^2 + h^2$ સંબંધ હંમેશાં જળવાય છે.
* શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$
* શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
* કોઈ પણ શંકુ માટે, $l^2 = r^2 + h^2$

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તેવા લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10$ સેમી^{2}

$=$ **220 સેમી^{2}**

2. શંકુની ઊંચાઈ 16 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

અહીં, $h = 16$ સેમી અને $r = 12$ સેમી

આથી $l^2 = h^2 + r^2$ પરથી,

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ સેમી $= 20$ સેમી

આથી શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20$ સેમી^{2}

$=$ **753.6 સેમી^{2}**

વળી,

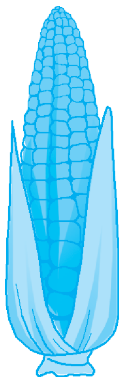
શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)$ સેમી^{2}

$= (753.6 + 452.16)$ સેમી^{2}

$=$ **1205.76 સેમી^{2}**

3. મકાઈના ડોડાનો આકાર લગભગ શંકુ જેવો હોય છે. (જુઓ આકૃતિ) તેના સૌથી પહોળા ભાગની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી અને લંબાઈ (ઊંચાઈ) 20 સેમી છે. જો ડોડાની પ્રત્યેક 1 સેમી^{2} સપાટી પર આશરે 4 મકાઈના દાણા હોય, તો આખા ડોડા પર કુલ કેટલા દાણા હશે, તે શોધો.



મકાઈના દાણા માત્ર ડોડાની વક્રસપાટી પર જ હોવાથી, કુલ મકાઈના દાણાની સંખ્યા શોધવા તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધવું પડે.

અહીં, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ સેમી

$= \sqrt{404.41}$ સેમી $= 20.11$ સેમી

આથી મકાઈના ડોડાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ સેમી^{2}

$= 132.726$ સેમી$^2 = 132.73$ સેમી^{2} (લગભગ)

1 સેમી^{2} ડોડાની વક્રસપાટી પર દાણાની સંખ્યા $= 4$

આથી આખા ડોડા પર દાણાની સંખ્યા $= 132.73 \times 4$

$= 530.92$

$= 531$ (લગભગ)

આથી મકાઈના ડોડા પર આશરે **531** દાણા હશે.

સ્વાધ્યાય 11.1 | પાના નં. 122 – 123

નોંધ : જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન કરેલ હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 10.5 સેમી અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આપેલ શંકુ માટે વ્યાસ = 10.5 સેમી,

માટે, ત્રિજ્યા $r = \frac{10.5}{2}$ સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 10$ સેમી

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 10$ સેમી^{2}

$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{2}$ સેમી^{2}

$= 11 \times 15$ સેમી$^2 = 165$ સેમી^{2}

આમ, આપેલ શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **165 સેમી^{2}** છે.

2. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 21 મી અને પાયાનો વ્યાસ 24 મી હોય તેવા શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

આપેલ શંકુ માટે વ્યાસ = 24 મી,

માટે, ત્રિજ્યા $r = \frac{24}{2} = 12$ મી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 21$ મી

શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi r (l + r)$

$= \frac{22}{7} \times 12 (21 + 12)$ મી^{2}

$= \frac{22 \times 12 \times 33}{7}$ મી^{2}

$= \frac{8712}{7}$ મી$^2 = 1244.57$ મી^{2}

આમ, આપેલ શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ **1244.57 મી^{2}** છે.

3. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 308 સેમી^{2} અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 14 સેમી છે. આ શંકુની
(i) પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

આપેલ શંકુ માટે, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 308 સેમી^{2} અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 14$ સેમી.

(i) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$\therefore 308$ સેમી$^2 = \frac{22}{7} \times r \times 14$ સેમી

$\therefore \frac{308 \times 7}{22 \times 14}$ સેમી $= r$

$\therefore r = 7$ સેમી

આમ, શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા **7 સેમી** છે.

(ii) શંકુની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl + \pi r^2$

$= 308 + \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2}

$= 308 + 154$ સેમી$^2 = 462$ સેમી^{2}

આમ, શંકુની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ **462 સેમી^{2}** છે.

4. શંકુ આકારનો તંબુ 10 મી ઊંચો છે અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 24 મી છે, તો (i) તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો. (ii) 1 મી^{2}ના ₹ 70 લેખે તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો કુલ ખર્ચ શોધો.

શંકુ આકારના તંબુ માટે ત્રિજ્યા $r = 24$ મી અને ઊંચાઈ $h = 10$ મી.

(i) $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676}$

$\therefore l = 26$ મી

આમ, શંકુ આકારના તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ **26 મી** છે.

(ii) શંકુ આકારના તંબુમાં વપરાતા કાપડનું ક્ષેત્રફળ

= શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26$ મી^{2}

$= \frac{13728}{7}$ મી^{2}

1 મી^{2} કાપડની કિંમત = ₹ 70

$\therefore \frac{13728}{7}$ મી^{2} કાપડની કિંમત = ₹$\left(70 \times \frac{13728}{7}\right)$

= ₹ 1,37,280

આમ, તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો ખર્ચ **₹ 1,37,280** થાય.

5. જેની ઊંચાઈ 8 મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 6 મી હોય તેવા શંકુ આકારના તંબુ બનાવવા માટે 3 મી પહોળી કેટલી તાડપત્રીની જરૂર પડે? માની લો કે સિલાઈના માપ અને કાપકૂપમાં થતાં બગાડમાં લગભગ 20 સેમી જેટલી વધારાની તાડપત્રી વપરાય છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

શંકુ આકારના તંબુ માટે ત્રિજ્યા $r = 6$ મી અને ઊંચાઈ $h = 8$ મી.

$l^2 = h^2 + r^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$\therefore l = \sqrt{100} = 10$ મી

શંકુમાં વપરાતી તાડપત્રીનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl$

$= 3.14 \times 6 \times 10$ મી^{2}

$= 188.4$ મી^{2}

હવે, તાડપત્રીની પહોળાઈ 3 મી છે.

$\therefore$ જરૂરી તાડપત્રીની લંબાઈ $= \frac{188.4}{3}$ મી $= 62.8$ મી

પરંતુ, 20 સેમી એટલે કે 0.2 મી તાડપત્રીનો કાપકૂપમાં બગાડ થાય છે.

$\therefore$ તંબુ બનાવવા જરૂરી તાડપત્રીની લંબાઈ = 62.8 + 0.2 મી

= 63 મી

આમ, તંબુ બનાવવા માટે **63 મી** લંબાઈની તાડપત્રીની જરૂર પડે.

6. શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને પાયાનો વ્યાસ અનુક્રમે 25 મી અને 14 મી છે. તેની વક્રસપાટી પર 100 મી^{2}ના ₹ 210 લેખે ચૂનો કરવાનો ખર્ચ શોધો.

શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 25$ મી અને

ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{14}{2} = 7$ મી.

ચૂનો કરવાના વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$ મી^{2}

$= 550$ મી^{2}

100 મી^{2} વિસ્તારમાં ચૂનો કરવાનો ખર્ચ = ₹ 210

$\therefore$ 550 મી^{2} વિસ્તારમાં ચૂનો કરવાનો ખર્ચ = ₹ $\left(\frac{210 \times 550}{100}\right)$

= ₹ 1155

આમ, મકબરાની વક્રસપાટીને ચૂનો કરવાનો ખર્ચ **₹ 1155** થશે.

7. એક જોકર(વિદૂષક)ની ટોપી લંબવૃત્તીય શંકુ આકારની છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. આવી 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

શંકુ આકારની ટોપી માટે ત્રિજ્યા $r = 7$ સેમી અને

ઊંચાઈ $h = 24$ સેમી.

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49}$

$= \sqrt{625} = 25$ સેમી

શંકુ આકારની ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ

= શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$ સેમી^{2}

$= 550$ સેમી^{2}

1 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ = 550 સેમી^{2}

$\therefore$ 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ

$= 550 \times 10$ સેમી^{2}

$= 5500$ સેમી^{2}

આમ, 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ **5500 સેમી^{2}** થાય.

8. એક બસ-સ્ટૉપને રોડના બાકીના ભાગથી જુદો પાડવા ફરી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા કાર્ડબોર્ડથી 50 પોલા શંકુ બનાવ્યા છે. પ્રત્યેક શંકુનો પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંચાઈ 1 મી છે. જો પ્રત્યેક શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 12 લેખે આવે, તો બધા જ શંકુ રંગવાનો કુલ ખર્ચ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{1.04} = 1.02$ લો.)

આપેલ શંકુ માટે ત્રિજ્યા,

$r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{40}{2} = 20$ સેમી $= 0.2$ મી

અને ઊંચાઈ $h = 1$ મી.

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{1^2 + 0.2^2} = \sqrt{1.04} = 1.02$ મી

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 0.2 \times 1.02$ મી^{2}

$\therefore$ 50 શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 50 \times 3.14 \times 0.2 \times 1.02$ મી^{2}

$= 32.028$ મી^{2}

1 મી^{2} વિસ્તારને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 12

$\therefore$ 32.028 મી^{2} વિસ્તારને રંગવાનો ખર્ચ

$= ₹ (12 \times 32.028)$

= ₹ 384.34 (આશરે)

આમ, 50 શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ **₹ 384.34 (આશરે)** થશે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. એક શંકુના પાયાનો વ્યાસ 7 સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ 16.5 સેમી છે, તો આ શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

2. 8 મીટર વ્યાસ અને 3 મીટર ઊંચાઈ ધરાવતા શંકુ આકારના 5 તંબુ બનાવવા 2 મીટર પનાવાળું કેટલું કાપડ જોઈએ? ($\pi = 3.14$ લો.)

3. એક શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 628 સેમી^{2} છે. જો તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 20 સેમી હોય, તો તેની પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક બંધ શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ 176 સેમી^{2} છે. જો શંકુની ત્રિજ્યા 4 સેમી હોય, તો તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

5. 5 મીટર ત્રિજ્યા અને 14 મીટર ત્રાંસી ઊંચાઈના શંકુ આકારનો એક તંબુ બનાવવો છે. આ તંબુમાં 2 મીટર પનાનું કેટલા મીટર કાપડ જોઈએ?

6. પાયાની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને ઊંચાઈ 48 સેમી હોય તેવી શંકુ આકારની 10 જોકરની ટોપીઓ બનાવવામાં જરૂરી રંગીન કાગળનું ક્ષેત્રફળ સેમી^{2} માં શોધો.

જવાબો : **1.** 220 સેમી^{2} **2.** 157 મી **3.** 10 સેમી **4.** 10 સેમી **5.** 110 મી **6.** 22,000 સેમી^{2}

યાદ રાખો

* **ગોલક અથવા ગોળો (Sphere) :** પૂંઠામાંથી કાપેલ કોઈ વર્તુળને તેના કોઈ વ્યાસને ધરી તરીકે લઈ ઘુમાવવામાં આવે તો અવકાશમાં જે ઘન આકૃતિ બને તેને ગોલક અથવા ગોળો કહેવાય. ઘુમાવવામાં આવતા વર્તુળનું કેન્દ્ર એ જ ગોલકનું કેન્દ્ર છે અને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ગોલકની ત્રિજ્યા છે. ગોલકને એક જ વક્રસપાટી હોય છે.
* **અર્ધગોલક અથવા અર્ધગોળો (Hemisphere) :** ગોલકને બરાબર વચ્ચેથી કાપીને બે સરખા ભાગમાં વહેંચતા બે અર્ધગોલક મળે. તેને બે જાતની સપાટી હોય છે. એક વક્રસપાટી અને બીજી સપાટ વર્તુળાકાર સપાટી જેને અર્ધગોલકનો પાયો પણ કહે છે.
* ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$, જ્યાં r = ગોલકની ત્રિજ્યા
* અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$, જ્યાં r = અર્ધ-ગોલકની ત્રિજ્યા
* અર્ધગોલકની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$, જ્યાં r = અર્ધ-ગોલકની ત્રિજ્યા

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

4. 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2} = **616 સેમી^{2}**

5. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલકની (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

(i) 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2}

= **2772 સેમી^{2}**

(ii) અર્ધગોલકનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2}

= **4158 સેમી^{2}**

6. સરકસમાં કામ કરતો મોટરસાઇકલ-સવાર 7 મી વ્યાસવાળા પોલા ગોલકમાં પ્રદર્શન કરે છે. મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ગોલકનો વ્યાસ = 7 મી

આથી તેની ત્રિજ્યા $= \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{7}{2}$ મી $= 3.5$ મી

આથી મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ

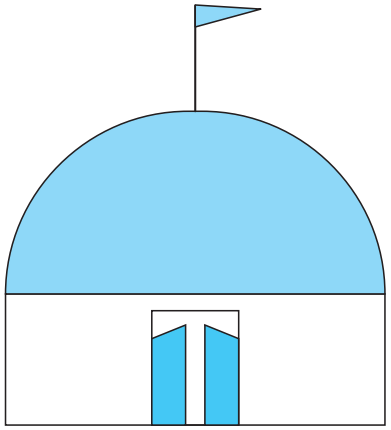
= ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ મી^{2}

= **154 મી^{2}**

7. એક મકાનના અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ) જો અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટનો પરિઘ 17.6 મી હોય, તો તેને 100 સેમી^{2}ના ₹ 5 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.



હવે, ઘુમ્મટનો પરિઘ = 17.6 મી

તેથી $17.6 = 2\pi r$

તેથી ઘુમ્મટની ત્રિજ્યા $r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ મી $= 2.8$ મી

ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ મી^{2}

$= 49.28$ મી^{2}

હવે, 100 સેમી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 5.

તો, 1 મી^{2} (= 10000 સેમી^{2}) રંગવાનો ખર્ચ ₹ 500.

આખા અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 500 × 49.28

= **₹ 24,640**

સ્વાધ્યાય 11.2 | પાના નં. 125 – 126

નોંધ : જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :
(i) 10.5 સેમી (ii) 5.6 સેમી (iii) 14 સેમી

(i) અહીં ગોળાની ત્રિજ્યા $r = 10.5$ સેમી $= \frac{21}{2}$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$=$ **1386 સેમી^{2}**

(ii) અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા $r = 5.6$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6$ સેમી^{2}

$=$ **394.24 સેમી^{2}**

(iii) અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા $r = 14$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ સેમી^{2}

$=$ **2464 સેમી^{2}**

2. આપેલ વ્યાસ પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :
(i) 14 સેમી (ii) 21 સેમી (iii) 3.5 મી

(i) અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2}$

$= \frac{14}{2}$ સેમી $= 7$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2}

$=$ **616 સેમી^{2}**

(ii) અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{21}{2}$ સેમી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$=$ **1386 સેમી^{2}**

(iii) અહીં, ગોળાની ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2}$

$= \frac{3.5}{2}$ મી $= \frac{35}{20}$ મી

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{20} \times \frac{35}{20}$ મી^{2}

$=$ **38.5 મી^{2}**

3. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
($\pi = 3.14$ લો.)

અહીં, અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા $r = 10$ સેમી

અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 3\pi r^2$

$= 3 \times 3.14 \times 10 \times 10$ સેમી^{2}

$=$ **942 સેમી^{2}**

4. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 7 સેમીથી વધીને 14 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

મૂળ પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા $r = 7$ સેમી

મૂળ પરિસ્થિતિમાં ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2}

નવી પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા $r = 14$ સેમી

નવી પરિસ્થિતિમાં ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ સેમી^{2}

બંને પરિસ્થિતિમાં ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

$= \frac{4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7}{4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14} = \frac{1}{4} = 1 : 4$

આમ, માગેલ ગુણોત્તર **1 : 4** છે.

નોંધ : અહીં ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર $= 7 : 14 = 1 : 2$ છે.

માટે વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર $= \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4} = 1 : 4$ થાય, કારણ કે વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળના સૂત્રમાં ત્રિજ્યા rની ઘાત 2 છે.

5. તાંબાના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરનો વ્યાસ 10.5 સેમી છે. તેની અંદર સપાટીને 100 સેમી^{2}ના ₹ 16 લેખે કલાઈ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?

અર્ધગોળાકાર વાટકાની ત્રિજ્યા,

$r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{10.5}{2}$ સેમી $= \frac{\frac{21}{2}}{2}$ સેમી $= \frac{21}{4}$ સેમી

અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ,

$= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{21}{4}$ સેમી^{2}

$= \frac{11 \times 63}{4}$ સેમી$^2 = 173.25$ સેમી^{2}

100 સેમી^{2} વિસ્તારમાં કલાઈ કરવાનો ખર્ચ $=$ ₹ 16

$\therefore$ 173.25 સેમી^{2} વિસ્તારમાં કલાઈ કરવાનો ખર્ચ

$= ₹ \left(\frac{16 \times 173.25}{100}\right) =$ ₹ 27.72

આમ, વાટકાની અંદરની સપાટીને કલાઈ કરવાનો ખર્ચ ₹ **27.72** થાય.

6. જો ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **154** સેમી^{2} હોય, તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

$\therefore 154 \text{ સેમી}^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 \text{ સેમી}^2$

$\therefore r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} \text{ સેમી}^2$

$\therefore r^2 = \frac{49}{4} \text{ સેમી}^2$

$\therefore r = \frac{7}{2}$ સેમી

$\therefore r = 3.5$ સેમી

આમ, આપેલ ગોળાની ત્રિજ્યા **3.5 સેમી** છે.

7. જો ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના આશરે ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

ધારો કે, ચંદ્રનો વ્યાસ $= d_1$

$\therefore$ પૃથ્વીનો વ્યાસ $= 4 \times d_1 = 4d_1$

ચંદ્રની ત્રિજ્યા $r_1 = \frac{d_1}{2}$

અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા $r_2 = \frac{4d_1}{2} = 2d_1$

$$\frac{\text{ચંદ્રની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{પૃથ્વીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{4\pi\ (\text{ત્રિજ્યા})^2}{4\pi\ (\text{ત્રિજ્યા})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{(2d_1)^2}$$

$$= \frac{d_1^2}{4} \times \frac{1}{4d_1^2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$= 1 : 16$$

આમ, ચંદ્રની અને પૃથ્વીની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર **1 : 16** થાય.

8. સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની જાડાઈ **0.25** સેમી છે. જો વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા **5** સેમી હોય, તો વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા 5 સેમી અને વાટકાની જાડાઈ 0.25 સેમી છે.

$\therefore$ વાટકાની બહારની સપાટીની ત્રિજ્યા $r = 5 + 0.25$ સેમી

$= 5.25$ સેમી

અર્ધગોળાકાર વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25 \text{ સેમી}^2$

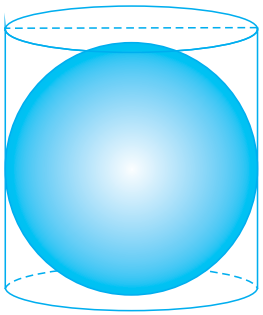
$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{525}{100} \times \frac{525}{100} \text{ સેમી}^2$

$= \frac{693}{4} \text{ સેમી}^2$

$= 173.25 \text{ સેમી}^2$

આમ, વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **173.25 સેમી^{2}** છે.

9. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધ બેસે તે રીતે **r** ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે, (જુઓ આકૃતિ) તો **(i)** ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **(ii)** નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **(iii)** **(i)** અને **(ii)**માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.



અહીં, નળાકારની ત્રિજ્યા = ગોળાની ત્રિજ્યા $= r$

અને નળાકારની ઊંચાઈ $h = 2 \times$ ગોળાની ત્રિજ્યા $= 2r$ થાય.

(i) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \mathbf{4\pi r^2}$

(ii) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \pi \times r \times 2r$

$= \mathbf{4\pi r^2}$

(iii) (i) અને (ii)માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર

$= \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{1} = \mathbf{1 : 1}$

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. એક ગોળાની ત્રિજ્યા 7 સેમી છે, તો આ ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. ધાતુના એક નક્કર ઘન અર્ધગોળાનો વ્યાસ 7 સેમી છે, તો આ અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

3. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 314 સેમી^{2} છે, તો આ ગોળાનો વ્યાસ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. 4158 સેમી^{2} કુલ પૃષ્ઠફળ ધરાવતા ઘન અર્ધગોળાનો વ્યાસ શોધો.

5. એક અર્ધગોળાકાર પોલા ઢાંકણનો વ્યાસ 7 મીટર છે. આવાં તૈયાર 10 ઢાંકણની બહારની વક્રસપાટી રંગવાનો ખર્ચ દર મી^{2} ના ₹ 20 લેખે કેટલો થાય?

6. એક ગોળાકાર બલૂનમાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 14 સેમીથી વધીને 35 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં બલૂનની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

જવાબો : **1.** 616 સેમી^{2} **2.** 115.5 સેમી^{2} **3.** 10 સેમી **4.** 42 સેમી **5.** ₹ 15,400 **6.** 4 : 25

યાદ રાખો

* શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$; જ્યાં, r = શંકુની ત્રિજ્યા અને h = શંકુની ઊંચાઈ છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

8. એક શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ અનુક્રમે 21 સેમી અને 28 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

$l^2 = r^2 + h^2$ પરથી,

$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2}$ સેમી $= 7\sqrt{7}$ સેમી

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ સેમી^{3}

$=$ **7546 સેમી^{3}**

9. મોનિકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો.

અહીં, કૅનવાસ વપરાય તેનું ક્ષેત્રફળ $= 551$ મી^{2} અને બગાડમાં જતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} છે. તેથી તંબુ બનાવવા માટે મળતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ $(551 - 1)$ મી$^2 = 550$ મી^{2}.

તેથી તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 550$ મી^{2} અને જરૂરી તંબુના પાયાની ત્રિજ્યા $= 7$ મી

તંબુ બનાવવા માટે ફક્ત વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું કૅનવાસ જોઈએ.

તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 550$ મી^{2}

$\therefore \pi r l = 550$

$\therefore \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

$\therefore l = \frac{550}{22}$ મી $= 25$ મી

હવે, $l^2 = r^2 + h^2$

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2}$ મી

$= \sqrt{625 - 49}$ મી $= \sqrt{576}$ મી $= 24$ મી

આથી શંકુ આકારના તંબુનું ઘનફળ

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ મી^{3}

$=$ **1232 મી^{3}**

સ્વાધ્યાય 11.3 | પાના નં. 127 – 128

નોંધ : જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નીચેનાં લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શોધો :

(i) ત્રિજ્યા 6 સેમી, ઊંચાઈ 7 સેમી

(ii) ત્રિજ્યા 3.5 સેમી, ઊંચાઈ 12 સેમી

(i) આપેલ શંકુ માટે ત્રિજ્યા $r = 6$ સેમી અને ઊંચાઈ $h = 7$ સેમી.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 7$ સેમી^{3}

$=$ **264 સેમી^{3}**

(ii) આપેલ શંકુ માટે ત્રિજ્યા $r = 3.5$ સેમી $= \frac{7}{2}$ સેમી અને ઊંચાઈ $h = 12$ સેમી.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12$ સેમી^{3}

$=$ **154 સેમી^{3}**

2. નીચેના શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા લિટરમાં શોધો :

(i) ત્રિજ્યા 7 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી

(ii) ઊંચાઈ 12 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી

(i) આપેલ શંકુ માટે ત્રિજ્યા $r = 7$ સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 25$ સેમી.

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576}$

$\therefore h = 24$ સેમી

શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ સેમી^{3}

$= 1232$ સેમી^{3}

$= \frac{1232}{1000}$ લિટર

$=$ **1.232** લિટર

(ii) આપેલ શંકુ માટે ઊંચાઈ $h = 12$ સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 13$ સેમી.

$r = \sqrt{l^2 - h^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2}$

$= \sqrt{169 - 144}$

$= \sqrt{25}$

$\therefore r = 5$ સેમી

શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 12$ સેમી^{3}

$= \frac{6600}{21}$ સેમી^{3}

$= \frac{6600}{21 \times 1000}$ લિટર

$= \mathbf{\frac{11}{35}}$ **લિટર**

3. એક શંકુની ઊંચાઈ 15 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 1570 સેમી^{3} હોય, તો તેના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

શંકુનું ઘનફળ = 1570 સેમી^{3}, ઊંચાઈ $h = 15$ સેમી અને ત્રિજ્યા = r.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ 1570 સેમી$^3 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15$ સેમી^{3}

$\therefore$ 1570 સેમી$^3 = 15.7 \times r^2$ સેમી^{3}

$\therefore r^2 = \frac{1570}{15.7}$ સેમી^{2}

$\therefore r^2 = 100$ સેમી^{2} $\therefore r =$ **10 સેમી**

4. એક લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 48π સેમી^{3} છે. તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો તેના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

શંકુનું ઘનફળ = 48π સેમી^{3}, ઊંચાઈ $h = 9$ સેમી અને ત્રિજ્યા = r.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore 48\pi$ સેમી$^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 9$ સેમી^{3}

$\therefore r^2 = \frac{48\pi \times 3}{\pi \times 9}$ સેમી^{2} $\therefore r^2 = 16$ સેમી^{2} $\therefore r = 4$ સેમી

હવે, વ્યાસ $= 2r = 2 \times 4$ સેમી = **8 સેમી**

5. એક શંકુ આકારના ખાડાના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 3.5 મી અને ઊંડાઈ 12 મી છે. તેની ક્ષમતા (કિલોલિટરમાં) કેટલી થાય?

શંકુ આકારના ખાડા માટે,

ત્રિજ્યા $= \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{3.5}{2}$ મી $= \frac{35}{20}$ મી

અને ઊંચાઈ (ઊંડાઈ) $h = 12$ મી

શંકુ આકારના ખાડાની ક્ષમતા

= શંકુનું ઘનફળ

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{20} \times \frac{35}{20} \times 12$ મી^{3}

$= 38.5$ મી^{3}

= **38.5** કિલોલિટર

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 9856 સેમી^{3} છે. તેના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી છે, તો (i) શંકુની ઊંચાઈ, (ii) શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને (iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(i) શંકુનું ઘનફળ = 9856 સેમી^{3},

ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{28}{2} = 14$ સેમી અને ઊંચાઈ = h.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ 9856 સેમી$^3 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h$ સેમી^{3}

$\therefore h = \frac{9856 \times 3 \times 7}{22 \times 14 \times 14}$ સેમી $\therefore h =$ **48 સેમી**

(ii) $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{48^2 + 14^2} = \sqrt{2304 + 196} = \sqrt{2500}$

$\therefore l =$ **50 સેમી**

(iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 50$ સેમી^{2}

= **2200 સેમી^{2}**

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABCની બાજુનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે. જો તેને 12 સેમીની બાજુ તરફ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો તેથી બનતા શંકુનું ઘનફળ શોધો.

5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી બાજુઓવાળાં ત્રિકોણને 12 સેમીની બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવાથી મળતા શંકુ માટે ત્રિજ્યા $r = 5$ સેમી, ઊંચાઈ $h = 12$ સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 13$ સેમી થાય.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 12$ સેમી^{3}

= **100π સેમી^{3}**

8. ઉપરના દાખલા 7માં આપેલ ત્રિકોણ ABCનું 5 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ઘનનું ઘનફળ શોધો તથા દાખલા 7 અને 8માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી બાજુઓવાળા ત્રિકોણને 5 સેમીની બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવાથી મળતા શંકુ માટે ત્રિજ્યા $r = 12$ સેમી, ઊંચાઈ $h = 5$ સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = 13$ સેમી થાય.

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 5$ સેમી^{3}

$=$ **240π સેમી^{3}**

દાખલા 7 અને 8માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર

$= \frac{100\pi}{240\pi} = \frac{5}{12} =$ **5 : 12**

9. એક શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાના પાયાનો વ્યાસ 10.5 મી અને ઊંચાઈ 3 મી છે. તેનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને વરસાદથી બચાવવા કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવે છે, તો આ માટે જરૂરી કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલા માટે ત્રિજ્યા

$r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{10.5}{2}$ મી $= \frac{105}{20}$ મી અને ઊંચાઈ $h = 3$ મી

શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાનું ઘનફળ

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{105}{20} \times \frac{105}{20} \times 3$ મી^{3}

$=$ **86.625 મી^{3}**

ઢગલાને કેનવાસથી ઢાંકવા માટે શંકુની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું કેનવાસ જોઈએ.

$l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{105}{20}\right)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{(5.25)^2 + 9}$

$= \sqrt{27.5625 + 9} = \sqrt{36.5625} = 6.05$ મી (આશરે)

શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{20} \times 6.05$ મી^{2}

$= 99.825$ મી^{2}

આમ, ઢગલાને કેનવાસથી ઢાંકવા માટે **99.825 મી^{2}** કેનવાસની જરૂર પડે.

દઢીકરણ માટેના દાખલા

1. એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે, તો આ શંકુનું ઘનફળ કેટલું હોય?

2. એક શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 550 ચો સેમી છે. જો શંકુનો વ્યાસ 14 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

3. એક શંકુના પાયાનો પરિઘ 44 સેમી છે. જો તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો શંકુનું ઘનફળ શોધો.

4. એક શંકુની ત્રિજ્યા 21 સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ 35 સેમી છે, તો શંકુનું ઘનફળ શોધો.

જવાબો : **1.** 3080 સેમી^{3}

2. 1232 સેમી^{3}

3. 462 સેમી^{3}

4. 12,936 સેમી^{3}

યાદ રાખો

* ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$; જ્યાં, $r =$ ગોળાની ત્રિજ્યા છે.
* અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$; જ્યાં, $r =$ અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

10. 11.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

ગોળાનું ઘનફળ

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ સેમી^{3}

$=$ **5887.32 સેમી^{3}**

11. ગોળાફેંકમાં વપરાતા ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 4.9 સેમી છે. જો વપરાયેલ ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ / સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

ગોળાફેંકમાં વપરાતો ગોળો ધાતુનો નક્કર ગોળો હોવાથી, તેનું દળ એ તેના ઘનફળ અને ઘનતાનો ગુણાકાર થશે. તેથી ગોળાનું ઘનફળ શોધવું પડશે.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ સેમી^{3}

$= 493$ સેમી^{3} (આશરે)

વળી, 1 સેમી^{3} ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ હોવાથી,

ગોળાનું દળ $= 7.8 \times 493$ ગ્રામ

$= 3845.4$ ગ્રામ $=$ **3.85** કિગ્રા (આશરે)

12. એક અર્ધગોળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે, તો તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

અર્ધગોળાકાર વાસણમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ સેમી^{3}

$=$ **89.8 સેમી^{3}**

સ્વાધ્યાય 11.4 | પાના નં. 129 – 130

નોંધ : જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાનું ઘનફળ શોધો :

(i) 7 સેમી (ii) 0.63 મી

(i) આપેલ ગોળા માટે ત્રિજ્યા $r = 7$ સેમી

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$ સેમી^{3}

$= \frac{4312}{3}$ સેમી^{3}

$=$ **$1437\frac{1}{3}$ સેમી^{3}**

(ii) આપેલ ગોળા માટે ત્રિજ્યા $r = 0.63$ મી

ગોળાનું ઘનફળ

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.63 \times 0.63 \times 0.63$ મી^{3}

$=$ **1.05 મી^{3}** (આશરે)

2. આપેલ વ્યાસવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ શોધો :

(i) 28 સેમી (ii) 0.21 મી

નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ = ગોળાનું ઘનફળ

(i) આપેલ ગોળા માટે ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{28}{2} = 14$ સેમી

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$ સેમી^{3}

$= \frac{34496}{3}$ સેમી^{3}

$= 11498\frac{2}{3}$ સેમી^{3}

આમ, આપેલ ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ **$11498\frac{2}{3}$ સેમી^{3}** થાય.

(ii) આપેલ ગોળા માટે ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{0.21}{2}$ મી

ગોળાનું ઘનફળ

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{0.21}{2} \times \frac{0.21}{2} \times \frac{0.21}{2}$ મી^{3}

$= 11 \times 0.01 \times 0.21 \times 0.21$ મી^{3}

$= 0.004851$ મી^{3}

આમ, આપેલ ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ **0.004851 મી^{3}** થાય.

3. એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 4.2 સેમી છે. જો તેના દ્રવ્યની ઘનતા 8.9 ગ્રામ / સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

આપેલ ગોળા માટે,

ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{4.2}{2} = 2.1$ સેમી $= \frac{21}{10}$ સેમી

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$ સેમી^{3}

$= 38.808$ સેમી^{3}

ધાતુનો ગોળો જે દ્રવ્યનો બનેલ છે તેની ઘનતા 8.9 ગ્રામ / સેમી^{3} છે.

$\therefore$ ધાતુના ગોળાનું દળ = ઘનફળ $\times$ ઘનતા

$= 38.808$ સેમી$^3 \times 8.9$ ગ્રામ / સેમી^{3}

$= 345.39$ ગ્રામ (આશરે)

આમ, આપેલ ધાતુના ગોળાનું દળ **345.39 ગ્રામ (આશરે)** છે.

4. જો ચંદ્રનો વ્યાસ આશરે પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો ચંદ્રની ત્રિજ્યા પૃથ્વીની ત્રિજ્યાના ચોથા ભાગ જેટલી જ હોય. બીજા શબ્દોમાં પૃથ્વીની ત્રિજ્યા ચંદ્રની ત્રિજ્યા કરતાં ચાર ગણી હોય. જો ચંદ્રની ત્રિજ્યા $= r$ અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા $= R$ લઈએ, તો $R = 4r$ થાય.

$$\frac{\text{પૃથ્વીનું ઘનફળ}}{\text{ચંદ્રનું ઘનફળ}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{(4r)^3}{r^3} = \frac{64r^3}{r^3} = 64 : 1$$

આમ, પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર **64 : 1** છે.

5. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

આપેલ અર્ધગોળાકાર પાત્ર માટે,

ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2} = \frac{10.5}{2}$ સેમી $= 5.25$ સેમી $= \frac{21}{4}$ સેમી

અર્ધગોળાકાર પાત્રની ક્ષમતા

= અર્ધગોળાકાર પાત્રનું ઘનફળ

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{21}{4} \times \frac{21}{4}$ સેમી^{3}

$= 303.19$ સેમી^{3} (આશરે)

$= \frac{303.19}{1000}$ લિટર (આશરે)

$= 0.303$ લિટર (આશરે)

આમ, આપેલ અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં **0.303 લિટર (આશરે)** દૂધ સમાવી શકાય.

6. એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી 1 સેમી જાડા લોખંડના પતરામાંથી બનાવેલી છે. જો તેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 મી હોય, તો આ ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ શોધો.

અર્ધગોળાકાર ટાંકીની અંદરની ત્રિજ્યા $r = 1$ મી

લોખંડના પતરાની જાડાઈ 1 સેમી $= 0.01$ મી છે.

$\therefore$ અર્ધગોળાકાર ટાંકીની બહારની ત્રિજ્યા $R = 1.01$ મી

ટાંકીમાં વપરાયેલ લોખંડનું ઘનફળ

= પોલા અર્ધગોળાકારનું ઘનફળ

$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7}(1.01^3 - 1^3)$ મી^{3}

$= \frac{44}{21}(1.030301 - 1)$ મી^{3}

$= 0.06349$ મી^{3} (આશરે)

આમ, ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ **0.06349 મી^{3} (આશરે)** છે.

7. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 154$ સેમી^{2} અને ત્રિજ્યા $= r$

ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$

$\therefore 154$ સેમી$^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2$ સેમી^{2}

$\therefore r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22}$ સેમી^{2}

$\therefore r^2 = \frac{49}{4}$ સેમી^{2}

$\therefore r = \frac{7}{2}$ સેમી

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ સેમી^{3}

$= \frac{539}{3}$ સેમી^{3}

$= 179\frac{2}{3}$ સેમી^{3}

આમ, આપેલ ગોળાનું ઘનફળ $\mathbf{179\frac{2}{3}}$ **સેમી^{3}** છે.

8. એક મકાનનો ઘુમ્મટ અર્ધગોળાકાર છે. તેની અંદરની બાજુએ ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ ₹ 4989.60 થાય છે. જો ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ 1 મી^{2}ના ₹ 20 હોય, તો (i) ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને (ii) ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ શોધો.

(i) ₹ 20 ખર્ચમાં ચૂનો લગાવવાના વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ $= 1$ મી^{2}

$\therefore$ ₹ 4989.60 ખર્ચમાં ચૂનો લગાવવાના વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{4989.60}{20}$ મી$^2 = 249.48$ મી^{2}

આથી ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ **249.48 મી^{2}** થાય.

(ii) અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

$\therefore 249.48$ મી$^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times r^2$ મી^{2}

$\therefore r^2 = \frac{249.48 \times 7}{2 \times 22}$ મી^{2} | $\therefore r = \sqrt{39.69}$ મી

$\therefore r^2 = 39.69$ મી^{2} | $\therefore r = 6.3$ મી

અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 6.3 \times 6.3 \times 6.3$ મી^{3}

$= 523.908$ મી^{3}

$= 523.9$ મી^{3} (આશરે)

આમ, અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ **523.9 મી^{3} (આશરે)** થાય.

9. જેની ત્રિજ્યા r અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S હોય, તેવા 27 લોખંડના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S′ હોય તેવો એક લોખંડનો ગોળો બનાવવામાં આવે છે, તો (i) નવા ગોળાની ત્રિજ્યા r' અને (ii) S અને S′ ગુણોત્તર શોધો.

(i) r ત્રિજ્યાવાળા 27 ગોળાને ઓગાળીને તેમાંથી r' ત્રિજ્યાવાળો એક નવો ગોળો બનાવેલ છે.

$\therefore r'$ ત્રિજ્યાવાળા નવા ગોળાનું ઘનફળ

= r ત્રિજ્યાવાળા 27 ગોળાનું ઘનફળ

$\therefore \frac{4}{3}\pi r'^3 = 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore r'^3 = 27r^3 \therefore \mathbf{r' = 3r}$

(ii) r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S છે અને r' ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S′ છે.

$\therefore \frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{r^2}{(3r)^2} = \frac{r^2}{9r^2} = \frac{1}{9}$

આમ, S અને S'નો ગુણોત્તર **1 : 9** થાય.

10. એક ગોળાકાર દવાની કૅપ્સ્યૂલનો વ્યાસ 3.5 મિમી છે, તો આ કૅપ્સ્યૂલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા કેટલી દવાની (મિમી^{3}) જરૂર પડશે?

દવાની ગોળાકાર કૅપ્સ્યૂલની ત્રિજ્યા $r = \frac{\text{વ્યાસ}}{2}$

$= \frac{3.5}{2} = 1.75$ મિમી

ગોળાકાર કૅપ્સ્યૂલનું ઘનફળ (ક્ષમતા)

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.75 \times 1.75 \times 1.75$ મિમી^{3}

$= 22.46$ મિમી^{3} (આશરે)

આમ, કૅપ્સ્યૂલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા માટે **22.46 મિમી^{3}** (આશરે) દવાની જરૂર પડશે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. એક નક્કર અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા 30 સેમી છે, તો તેનું ઘનફળ કેટલું થાય? ($\pi = 3.14$ લો.)

2. એક ગોળાનું ઘનફળ 4851 સેમી^{3} છે, તો તેનો વ્યાસ કેટલો હશે?

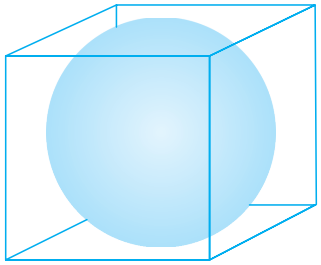
3. એક અર્ધગોળાનું ઘનફળ $89\frac{5}{6}$ સેમી^{3} છે, તો તેનો વ્યાસ કેટલો હશે?

4. એક ગોળાનું ઘનફળ $1437\frac{1}{3}$ સેમી^{3} છે, તો આ ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હોય?

5. એક નક્કર અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ 462 સેમી^{2} છે, તો તેનું ઘનફળ કેટલું થાય?

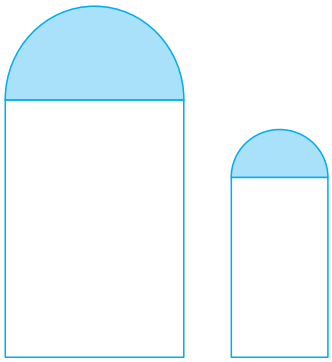
6. જો કોઈ ગોલકના વ્યાસમાં 25 % ઘટાડો કરવામાં આવે, તો તેની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં કેટલા ટકા ઘટાડો થાય?

7. એક સમઘનમાં બંધ બેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે, (જુઓ આકૃતિ) તો (1) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (2) સમઘનના પાર્શ્વ પૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (3) (1) અને (2)માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

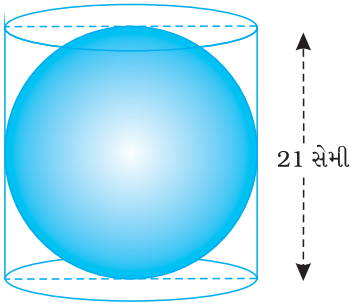


8. એક શંકુનું ઘનફળ 1232 મી^{3} અને તેના પાયાનું ક્ષેત્રફળ 154 મી^{2} છે, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

9. આપેલ આકૃતિમાં બે અર્ધગોળાકાર ગુંબજને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ) જો બે અર્ધગોળાકાર ગુંબજના પાયાના પરિઘ 70.4 મી અને 17.6 મી હોય, તો તેને મી^{2}ના ₹ 20 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.



10. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધ બેસે તે રીતે $(2m + 5)$ સેમી વ્યાસવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ). જો નળાકારની ઊંચાઈ 21 સેમી હોય, તો mની કિંમત અને ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



જવાબો : 1. 56,520 સેમી^{3} **2.** 21 સેમી **3.** 7 સેમી **4.** 616 સેમી^{2} **5.** $718\frac{2}{3}$ સેમી^{3} **6.** 43.75 % **7.** (1) $4\pi r^2$ (2) $16r^2$ (3) $\pi : 4$ **8.** 24 મી **9.** ₹ 16755.20 **10.** $m = 8$; 1386 સેમી^{2}

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

નોંધ : અન્ય ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) 1 હેક્ટર = ... મી^{2} *(10,000; 1000; 100)*

(2) અર્ધગોળાનું ઘનફળ = ... $\left(\frac{2}{3}\pi r^2,\ 2\pi r^2,\ \frac{2}{3}\pi r^3\right)$

(3) શંકુની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ...

(πrl, $\pi r^2 h$, $\pi r\,(l + r)$)

(4) બે શંકુની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર 1 : 1 અને તિર્યક ઊંચાઈઓનો ગુણોત્તર 3 : 4 હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનો ગુણોત્તર ..... થાય. *(4 : 3, 3 : 4, 2 : 3)*

(5) 2.1 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ ..... સેમી^{3} થાય.

(38.808, 38.800, 83.308)

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) 7 સેમી વ્યાસના ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

(2) એક શંકુની ત્રિજ્યા 5 સેમી અને તિર્યક ઊંચાઈ 16 સેમી છે, તો તેની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(3) 9 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોળાને પિગાળીને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા કેટલા ગોળા બને તે શોધો.

(4) 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 1650 સેમી^{2} હોય, તો તેની તિર્યક ઊંચાઈ શોધો.

(5) એક ગોળાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ 5544 સેમી^{2} છે, તો તેનો વ્યાસ શોધો.

(6) જો r ત્રિજ્યા ધરાવતા ગોળાની ત્રિજ્યા અડધી કરવામાં આવે, તો તેનું નવું ઘનફળ શોધો.

(7) 24 સેમી ઊંચા લાકડાના ઘન શંકુના પાયાનો પરિઘ 44 સેમી છે, તો શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ શોધો.

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) એક શંકુનું ઘનફળ 6160 સેમી^{3} અને ઊંચાઈ 30 સેમી છે, તો તેની ત્રિજ્યા ..... સેમી હોય.

A. 7 B. 14 C. 21 D. 28

(2) બે ગોળાના વ્યાસનો ગુણોત્તર 3 : 5 છે, તો તેમના ઘનફળોનો ગુણોત્તર ..... થાય.

A. 9 : 25 B. 25 : 9 C. 27 : 125 D. 125 : 27

(3) 1 લિટર = ... સેમી^{3}

A. 10 B. 100 C. 1000 D. 10,000

(4) એક નળાકારનું ઘનફળ 448π સેમી^{3} અને ઊંચાઈ 7 સેમી છે, તો તેનો વ્યાસ ..... સેમી હોય.

A. 8 B. 24 C. 16 D. 14

(5) એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $676\,\pi$ સેમી^{2} છે, તો તેની ત્રિજ્યા ..... સેમી હોય.

A. 13 B. 26 C. 31 D. 14

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) એક શંકુની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે, તો તેનું ઘનફળ 1540 સેમી^{3} થાય.

(2) 5 સેમી ત્રિજ્યા અને 12 સેમી ઊંચાઈવાળા શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $60\,\pi$ સેમી^{2} થાય.

(3) ગોળાની ત્રિજ્યામાં 10 % વધારો કરવાથી તેના ઘનફળમાં 21 %નો વધારો થાય.

(4) બે નળાકારની ત્રિજ્યાઓનો ગુણોત્તર 3 : 4 અને ઊંચાઈઓનો ગુણોત્તર 8 : 9 હોય, તો તેમનાં ઘનફળોનો ગુણોત્તર 1 : 2 થાય.

(5) એક શંકુની ત્રિજ્યા 12 સેમી, તિર્યક ઊંચાઈ 37 સેમી અને ઊંચાઈ 35 સેમી હોઈ શકે.

(6) જો ગોળાનું ઘનફળ અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ સંખ્યાત્મક રીતે સમાન હોય, તો તેની ત્રિજ્યા 3 એકમ હોય.

5. યોગ્ય જોડકાં જોડો :

વિભાગ I	વિભાગ II
1. 1 મી^{3} = ... કિલોલિટર	a. $4\pi r^2$
2. લીંબુના બે ટુકડા કરતાં મળતા પ્રત્યેક ટુકડાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ...	b. $\frac{1}{3}$ × પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ
3. ₹ 5ના સિક્કાનું ઘનફળ = ...	c. $r^2 + h^2$
4. 1 લિટર = ... સેમી^{3}	d. $2\pi r^2$
5. શંકુનું ઘનફળ = ...	e. $2\pi r$
6. નારંગીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ...	f. 1
7. કોઈ પણ શંકુ માટે l^2 = ...	g. $\pi r^2 h$
8. શંકુના પાયાનો પરિઘ = ...	h. 10^3
	i. $\pi r\,(l + r)$
	j. $3\pi r^2$

જવાબો

1. (1) 10,000 (2) $\frac{2}{3}\pi r^3$ (3) $\pi r\,(l + r)$ (4) 3 : 4 (5) 38.808

2. (1) $179\frac{2}{3}$ સેમી^{3} (2) 330 સેમી^{2} (3) 27 ગોળા (4) 35 સેમી (5) 42 સેમી (6) $\frac{1}{6}\pi r^3$ (7) 25 સેમી

3. (1) B. 14 (2) C. 27 : 125 (3) C. 1000 (4) C. 16 (5) A. 13

4. (1) ખોટું (2) ખોટું (3) ખોટું (4) ખરું (5) ખરું (6) ખરું

5. 1 → f, 2 → j, 3 → g, 4 → h, 5 → b, 6 → a, 7 → c, 8 → e.

12 આંકડાશાસ્ત્ર (STATISTICS)

યાદ રાખો

માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત (Graphical representation of data) :

* માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆતને આલેખાત્મક રજૂઆત કહે છે. આપણે ત્રણ પ્રકારની ચિત્રાત્મક રજૂઆત અંગે અભ્યાસ કરીશું :
  (1) લંબાલેખ (Bar graph)
  (2) સમાન પહોળાઈ અને અસમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ (Histograms of uniform width and of varying width)
  (3) આવૃત્તિ બહુકોણ (Frequency polygon)
* **લંબાલેખ :** જેમાં સામાન્ય રીતે સમાન પહોળાઈવાળા લંબચોરસ કે જે જુદા જુદા ચલો દર્શાવી, તેને એક અક્ષ પર (ધારો કે x-અક્ષ) સમાન અંતરે દોરવામાં આવે છે, એવી માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆત એ લંબાલેખ છે. બીજા અક્ષ (ધારો કે, y-અક્ષ) પર ચલનું મૂલ્ય દર્શાવવામાં આવે છે. લંબચોરસની ઊંચાઈ તેના ચલની કિંમત પર આધારિત છે.
* **સ્તંભાલેખ :** આ આલેખ એ લંબાલેખની આલેખાત્મક રજૂઆતનું જ સ્વરૂપ છે, પરંતુ તે સતત વર્ગો માટે વપરાય છે. સ્તંભાલેખ બે પ્રકારના હોય છે : (1) સમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ અને (2) અસમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ.

(1) સમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ : સ્તંભાલેખ દોરવા માટે x-અક્ષ પર સમાન વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગનાં વર્ગસીમાબિંદુઓને અને y-અક્ષ પર આવૃત્તિઓને યોગ્ય પ્રમાણમાપ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ સ્તંભાલેખ માટે દરેક વર્ગ ઉપર તે વર્ગની આવૃત્તિના પ્રમાણમાં ઊંચાઈ ધરાવતો સ્તંભ દોરવામાં આવે છે. સ્તંભની સંખ્યા વર્ગની સંખ્યા જેટલી હોય છે. આ રીતે મળતી આકૃતિને સમાન પહોળાઈનો સ્તંભાલેખ કહે છે. આ સ્તંભાલેખનો દરેક સ્તંભ લંબચોરસ છે, જેનો પાયો વર્ગલંબાઈ છે અને ઊંચાઈ તેને અનુરૂપ આવૃત્તિ જેટલી હોય છે.

(2) અસમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ : અસમાન વર્ગ-લંબાઈવાળા આવૃત્તિ-વિતરણનો સ્તંભાલેખ દોરવા લંબચોરસની લંબાઈને પ્રમાણસર બનાવવી પડે. લંબચોરસની ઊંચાઈ (સપ્રમાણ આવૃત્તિ) માટે નીચેનું સૂત્ર ઉપયોગમાં લેવાય છે :

$$\frac{\text{આપેલા વર્ગની આવૃત્તિ}}{\text{આપેલા વર્ગની વર્ગલંબાઈ}} \times \text{સૌથી ઓછી લંબાઈવાળા વર્ગની વર્ગલંબાઈ}$$

આ પ્રકારના સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસની પહોળાઈ જુદી જુદી હોય છે અને લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ આવૃત્તિના સપ્રમાણમાં હોય છે.

* **આવૃત્તિ બહુકોણ (Frequency polygon) :** આવૃત્તિ-વિતરણના દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતને x-અક્ષ પર દર્શાવવામાં આવે છે અને જે-તે મધ્યકિંમતવાળા વર્ગની આવૃત્તિને y-અક્ષ પર દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\text{વર્ગની મધ્યકિંમત (Class-mark)} = \frac{\text{ઊર્ધ્વસીમા} + \text{અધઃસીમા}}{2}$$

પ્રથમ વર્ગની પહેલાંના સંભવિત વર્ગની મધ્યકિંમત અને અંતિમ વર્ગની પછીના સંભવિત વર્ગની મધ્યકિંમત પણ આલેખ પર દર્શાવવામાં આવે છે અને તે બંનેને સંગત આવૃત્તિ શૂન્ય (0) લેવામાં આવે છે. આ વર્ગોની મધ્યકિંમતો દર્શાવતાં બિંદુઓને પણ આલેખમાં દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, દર્શાવવાની મધ્યકિંમતોની સંખ્યા આપેલા વર્ગોની સંખ્યા કરતાં 2 વધારે હોય છે.

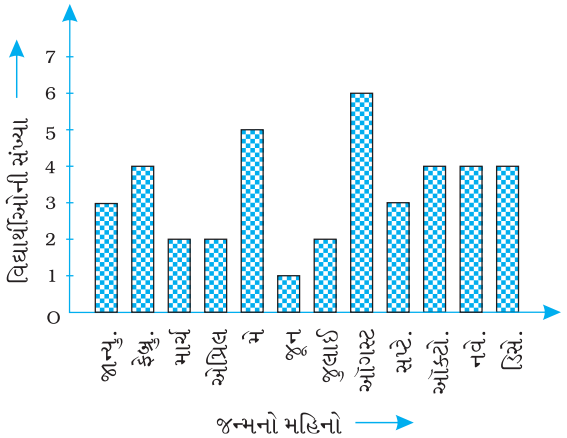
મેળવેલાં બિંદુઓને ક્રમમાં રેખાખંડો વડે જોડવામાં આવે છે. આ રીતે મળેલા આલેખને આવૃત્તિ બહુકોણ કહે છે. આવૃત્તિ બહુકોણ x-અક્ષ સાથે બંધ આકૃતિ રચે છે.

આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણનો સ્તંભાલેખ દોરેલ હોય, તો લંબચોરસના ઉપરની બાજુનાં મધ્યબિંદુઓને (x-અક્ષ પર લીધેલા સંભવિત વર્ગોનાં મધ્યબિંદુઓ સહિત) ક્રમશઃ રેખાખંડો વડે જોડવાથી આપેલ સતત આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિ બહુકોણ મળે છે.

જો પ્રથમ વર્ગ 0થી શરૂ થતો ન હોય, તો પ્રમાણમાપ બંધબેસતું કરવા x-અક્ષ પર કાપ કે છેદ મૂકવામાં આવે છે.

'યાદ રાખો'ની વિશેષ સમજના દાખલા

1. ધોરણ 9ના એક ચોક્કસ વિભાગના 40 વિદ્યાર્થીઓને તેમના જન્મનો મહિનો જણાવવાનું કહેવામાં આવ્યું અને તેથી મળેલી માહિતીને આધારે નીચેનો આલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો :



ઉપરના લંબાલેખને ધ્યાનથી જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) નવેમ્બર મહિનામાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા?

(ii) કયા મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા?

(i) નવેમ્બર મહિનામાં **4 વિદ્યાર્થીઓનો** જન્મ થયો હતો.

(ii) ઑગસ્ટ મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓનો જન્મ થયો હતો.

2. ₹ 20,000 માસિક આવક ધરાવતા એક કુટુંબે જુદાં જુદાં શીર્ષક હેઠળ થતાં માસિક ખર્ચનું નીચે પ્રમાણે આયોજન કર્યું હતું :

કોષ્ટક 1

સૂચિ (બજેટ-હેડ)	ખર્ચ (હજાર રૂપિયામાં)
કરિયાણું	4
ભાડું	5
બાળકોનું શિક્ષણ	5
દવાઓ	2
બળતણ	2
મનોરંજન	1
પ્રકીર્ણ	1

ઉપર્યુક્ત માહિતીના આધારે લંબાલેખ દોરો.

આપણે આ માહિતીના આધારે નીચે જણાવ્યા પ્રમાણે લંબાલેખ દોરીશું. આપણે નોંધીએ કે બીજી હરોળમાં એકમ 'હજાર રૂપિયામાં' છે, એટલે કે દવાઓ સામે '2' અંક છે. તેનો અર્થ ₹ 2000 થશે.

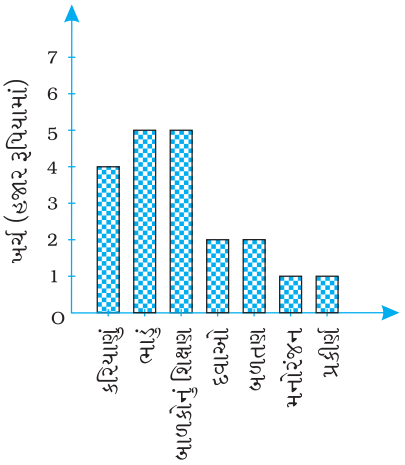
(1) અહીં લંબચોરસની પહોળાઈનું કોઈ મહત્ત્વ નથી. તેથી કોઈ પણ માપ પસંદ કરીને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર ચલ સૂચિ લઈશું, પરંતુ ચોકસાઈ રાખી દરેક લંબચોરસની પહોળાઈ સરખી રાખીશું અને બે લંબચોરસ વચ્ચેનું અંતર પણ સમાન રાખીશું. એક સૂચિને એક એકમ તરીકે લો.

(2) ખર્ચ શિરોલંબ અક્ષ પર નિર્દેશિત કરીએ છીએ. હવે વધુમાં વધુ ખર્ચ ₹ 5000 હોવાથી આપણે 1 એકમ = ₹ 1000 માપ લઈ શકીએ.

(3) પહેલા ચલ કરિયાણાને દર્શાવવા 1 એકમની પહોળાઈ અને 4 એકમની ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ બનાવીશું.

(4) આ પ્રમાણે બે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે 1 એકમનું અંતર છોડીને બીજા અન્ય ચલને દર્શાવીશું.

લંબાલેખ નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે :



સ્તંભાલેખ :

ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક લઈએ. તેમાં એક વર્ગના 36 વિદ્યાર્થીઓનું વજન આપેલું છે.

કોષ્ટક 2

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
કુલ	36

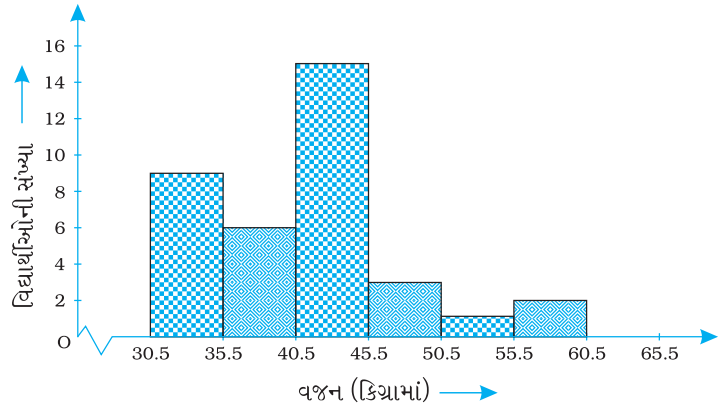
ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે કરીએ :

(i) આપણે સમક્ષિતિજ અક્ષ પર યોગ્ય માપ લઈને વજનને દર્શાવીશું. આપણે 1 સેમી = 5 કિગ્રા પસંદ કરી શકીએ, પરંતુ પહેલો વર્ગ શૂન્યને બદલે 30.5થી શરૂ થતો હોવાથી અક્ષ પર કાપ(Kink)નું ચિહ્ન બનાવીને દર્શાવીશું.

(ii) વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને શિરોલંબ અક્ષ પર યોગ્ય માપ દ્વારા દર્શાવીશું. સૌથી મોટી આવૃત્તિ 15 હોવાથી 15નો સમાવેશ થઈ શકે તેવી રીતે એને અનુરૂપ હોય તેવું માપ લઈશું.

(iii) હવે આપણે વર્ગલંબાઈ જેટલી પહોળાઈ અને વર્ગની સામે આપેલી આવૃત્તિને અનુરૂપ ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ દોરીશું. ઉદાહરણ તરીકે, વર્ગ 30.5 – 35.5ના લંબચોરસની પહોળાઈ 1 સેમી અને ઊંચાઈ 9 સેમી થશે.

(iv) આ પ્રમાણે આપણને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેનો આલેખ મળશે.



જુઓ કે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે કોઈ અંતર નથી. તેથી પરિણામી આલેખ એક ઘન આકૃતિ જેવો દેખાય છે. આ આલેખને **સ્તંભાલેખ (Histogram)** કહે છે. તેમાં સતત વર્ગવાળા વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણની એક આલેખાત્મક રજૂઆત છે. ઉપરાંત, જે લંબાલેખમાં ન હતી તે લંબચોરસની પહોળાઈ પણ આ આલેખની પ્રસ્તુતિમાં મહત્ત્વપૂર્ણ ભાગ ભજવે છે.

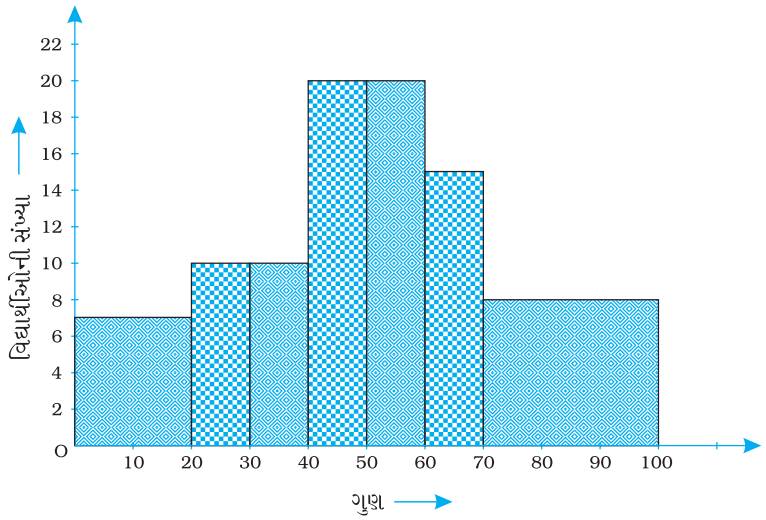
અહીં, ખરેખર તો ઊભા કરેલા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેને સંગત આવૃત્તિઓના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જોકે બધા લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન છે, પણ ઊંચાઈ આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં છે. આ કારણથી આપણે લંબાઈઓ ઉપર (iii)માં બતાવ્યા પ્રમાણે લીધી છે.

3. એક શિક્ષિકા ગણિતની 100 ગુણની પરીક્ષા લઈને બે વિભાગના વિદ્યાર્થીઓના દેખાવનું વિશ્લેષણ કરવા માગે છે. તેમનું કાર્ય જોઈને તેને જણાય છે કે ફક્ત થોડા જ વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 20થી ઓછા છે અને થોડા વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 70 કે તેથી વધુ છે. તેથી તેમણે વિદ્યાર્થીઓને 0 – 20, 20 – 30, ..., 60 – 70, 70 – 100 જેવા જુદી જુદી વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગોમાં વર્ગીકૃત કરવાનો નિર્ણય લેતાં, નીચે બતાવ્યા પ્રમાણેનું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 3

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 – 20	7
20 – 30	10
30 – 40	10
40 – 50	20
50 – 60	20
60 – 70	15
70 – 100	8
કુલ	90

નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વિદ્યાર્થી દ્વારા આ કોષ્ટકનો સ્તંભાલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો.



આલેખાત્મક રજૂઆતને બરાબર ચકાસો. શું તમે વિચારી શકો છો કે માહિતીનું આ સાચું નિર્દેશન છે? ના, આ આલેખ આપણને ગેરમાર્ગે દોરે છે. અગાઉ જણાવ્યા પ્રમાણે સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. અગાઉના આલેખમાં આ પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો ન હતો, કારણ કે બધા જ લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન હતી, પરંતુ અહીં લંબચોરસની પહોળાઈ બદલાય છે. આથી ઉપર જે સ્તંભાલેખ છે તે સાચું ચિત્ર રજૂ કરતો નથી. ઉદાહરણ તરીકે, વર્ગ 60 – 70 કરતાં વર્ગ 70 – 100ની આવૃત્તિ વધુ હોવી જોઈએ, પરંતુ તે હકીકતમાં નથી.

તેથી લંબચોરસની લંબાઈમાં થોડું પરિવર્તન કરવાની જરૂર પડશે, જેથી કરીને ફરીને ક્ષેત્રફળ એ આવૃત્તિને સપ્રમાણ થાય.

આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાન અનુસરીએ :

(1) સૌથી નાની વર્ગલંબાઈવાળો વર્ગ લો. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં સૌથી નાની વર્ગલંબાઈ 10 છે.

(2) લંબચોરસની લંબાઈ એવી રીતે બદલો કે જેથી દરેક વર્ગની વર્ગલંબાઈ 10 ને સપ્રમાણ થાય.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે વર્ગલંબાઈ 20 હોય ત્યારે લંબચોરસની લંબાઈ 7 છે, તો વર્ગલંબાઈ 10 હોય, તો લંબચોરસની લંબાઈ $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ થાય.

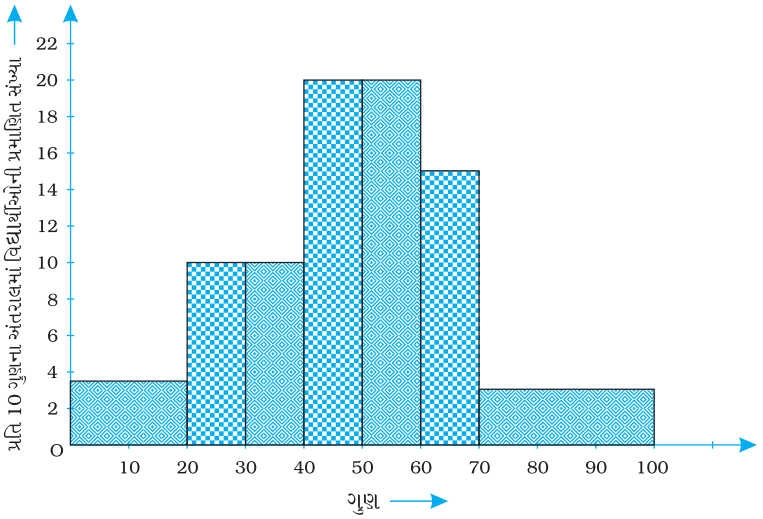
આ પ્રમાણે આગળ પ્રક્રિયા કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 4

ગુણ	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
0 – 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 – 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 – 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 – 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 – 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 – 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 – 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

આપણે આ દરેક વર્ગમાં વર્ગલંબાઈની ગણતરી 10 ગુણ પ્રમાણે કરેલી છે. તેથી આ લંબાઈઓને ''10 ગુણની વર્ગલંબાઈને અનુરૂપ વિદ્યાર્થીઓની સપ્રમાણ આવૃત્તિ'' (Proportional frequency) કહીશું.

તેથી વિવિધ વર્ગલંબાઈવાળો સાચો સ્તંભાલેખ નીચેની આકૃતિમાં આપેલ છે :



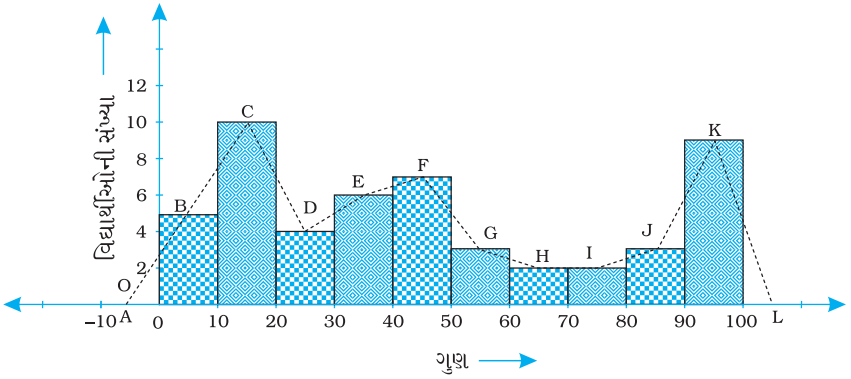
4. કોઈ એક વર્ગના 51 વિદ્યાર્થીઓના 100 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ નીચેના કોષ્ટકમાં આપ્યા છે :

કોષ્ટક 5

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 – 10	5
10 – 20	10
20 – 30	4
30 – 40	6
40 – 50	7
50 – 60	3
60 – 70	2
70 – 80	2
80 – 90	3
90 – 100	9
કુલ	51

ઉપર્યુક્ત આવૃત્તિ-વિતરણના કોષ્ટકને અનુરૂપ આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

સૌપ્રથમ આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી સ્તંભાલેખ દોરીએ અને લંબચોરસના ઉપરની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને અનુક્રમે B, C, D, E, F, G, H, I, J, K વડે દર્શાવીએ. અહીં પહેલો વર્ગ 0 – 10 છે. તેની આગળનો વર્ગ મેળવવા માટે સમક્ષિતિજ અક્ષને ઋણ દિશામાં લંબાવીને અને કાલ્પનિક વર્ગ (– 10) – 0નું મધ્યબિંદુ શોધો. પ્રથમ અંત્યબિંદુ એટલે કે Bને સમક્ષિતિજ અક્ષની ઋણ દિશામાં શૂન્ય આવૃત્તિવાળા વર્ગના મધ્યબિંદુ સાથે જોડવામાં આવે છે. તે શિરોલંબ અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે તેને A વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ માહિતીના અંતિમ વર્ગની પછીના કાલ્પનિક વર્ગનું મધ્યબિંદુ L માનીએ. આમ, આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ OABCDEFGHIJKL એ આવૃત્તિ બહુકોણ છે, તે આકૃતિમાં દર્શાવાયો છે.



આવૃત્તિ બહુકોણને સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય પણ સ્વતંત્ર રીતે દોરી શકાય છે. આ માટે માહિતીના દરેક વર્ગનાં મધ્યબિંદુઓની જરૂર પડે છે. આ વર્ગોનાં મધ્યબિંદુઓને વર્ગની **મધ્યકિંમત (Class-mark)** કહે છે.

વર્ગની મધ્યકિંમત શોધવા માટે વર્ગની અધઃસીમા અને ઊર્ધ્વસીમાનો સરવાળો કરી 2 વડે ભાગવામાં આવે છે.

$$\text{વર્ગની મધ્યકિંમત} = \frac{\text{ઊર્ધ્વસીમા} + \text{અધઃસીમા}}{2}$$

5. એક શહેરમાં જીવનનિર્વાહ અંક(Cost of living index)નો અભ્યાસ કરવા માટેનાં સાપ્તાહિક અવલોકનો નીચે કોષ્ટકમાં આપેલાં છે :

કોષ્ટક 6

જીવનનિર્વાહ અંક	સાપ્તાહિક સંખ્યા
140 – 150	5
150 – 160	10
160 – 170	20
170 – 180	9
180 – 190	6
190 – 200	2
કુલ	52

ઉપર્યુક્ત માહિતી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ (સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર) તૈયાર કરો.

સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે ઉપર્યુક્ત વર્ગો 140 – 150, 150 – 160, ...ની મધ્યકિંમતો શોધવી પડે.

વર્ગ 140 – 150 માટે ઊર્ધ્વસીમા = 150 અને અધઃસીમા = 140

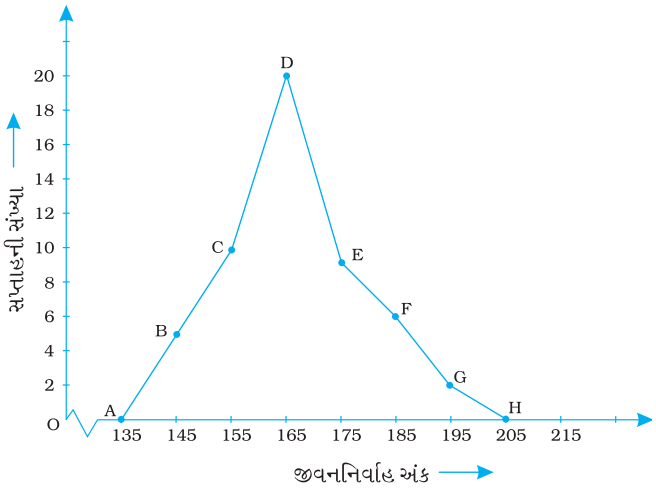
$$\text{વર્ગ મધ્યકિંમત} = \frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$$

આ જ રીતે બીજા વર્ગોની મધ્યકિંમતો મળે. આમ, નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે નવું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 7

વર્ગ	મધ્યકિંમત	આવૃત્તિ
140 – 150	145	5
150 – 160	155	10
160 – 170	165	20
170 – 180	175	9
180 – 190	185	6
190 – 200	195	2
કુલ		52

હવે મધ્યકિંમતોને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર અને આવૃત્તિઓને શિરોલંબ અક્ષ પર મૂકો અને પછી તે બિંદુઓ B (145, 5), C (155, 10), D (165, 20), E (175, 9), F (185, 6) અને G (195, 2)ને આલેખી તેમને રેખાખંડથી જોડો. કાલ્પનિક વર્ગ 130 – 140(જે સૌથી નાના વર્ગ 140 – 150ની બરાબર આગળનો વર્ગ)ના મધ્યબિંદુને સંગત શૂન્ય આવૃત્તિ એટલે કે A (135, 0) અને G (195, 2)ના તરત પછી આવતાં કાલ્પનિક વર્ગ માટે બિંદુ H (205, 0) લો. તેના પરિણામે આવૃત્તિ બહુકોણ ABCDEFGH મળશે. (જુઓ આકૃતિ)



સ્વાધ્યાય 12.1 | પાના નં. 141થી 144

1. કોઈ એક સંસ્થા દ્વારા 15થી 44 (વર્ષોમાં) વચ્ચેની વયવાળી સ્ત્રીની માંદગી અને મૃત્યુનાં કારણો શોધવા માટે કરવામાં આવેલ વિશ્વવ્યાપી સર્વેક્ષણના નીચે પ્રમાણેના આંકડા (%માં) મળ્યા હતા :

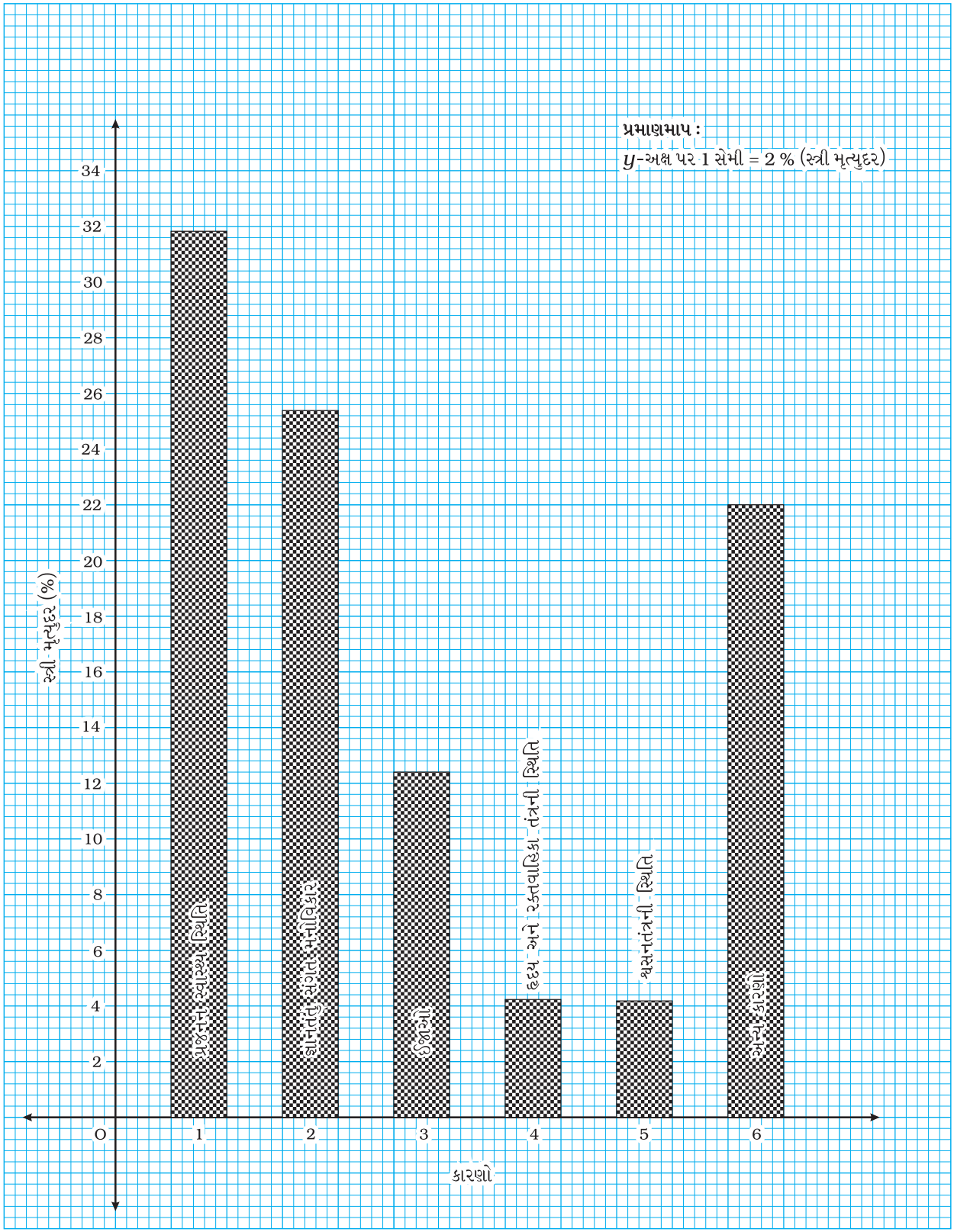
અ.નં.	કારણો	સ્ત્રી મૃત્યુદર (%)
1.	પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ	31.8
2.	જ્ઞાનતંતુ સંગત મનોવિકાર	25.4
3.	ઈજાઓ	12.4
4.	હૃદય અને રક્તવાહિકા તંત્રની સ્થિતિ	4.3
5.	શ્વસનતંત્રની સ્થિતિ	4.1
6.	અન્ય કારણો	22.0

(i) ઉપર આપેલી માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

(ii) વિશ્વમાં સ્ત્રીઓની માંદગી અને મૃત્યુ માટે કયું પરિબળ સૌથી વધુ કારણભૂત છે?

(iii) તમારા શિક્ષકની મદદથી ઉપર (ii)માં દર્શાવ્યા સિવાયનાં અન્ય બે મુખ્ય પરિબળો શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

(i) **15 વર્ષથી 44 વર્ષ વચ્ચેની વયવાળી સ્ત્રીની માંદગી અને મૃત્યુનાં કારણો**



(ii) વિશ્વમાં સ્ત્રીઓની માંદગી અને મૃત્યુ માટેનું સૌથી વધુ કારણભૂત પરિબળ **'પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ'** છે.

(iii) અન્ય મુખ્ય બે પરિબળોમાં **'અપૂરતું પોષણ'** અને **'જરૂરી સ્વાસ્થ્ય સેવાઓનો અભાવ'**ને ગણી શકાય.

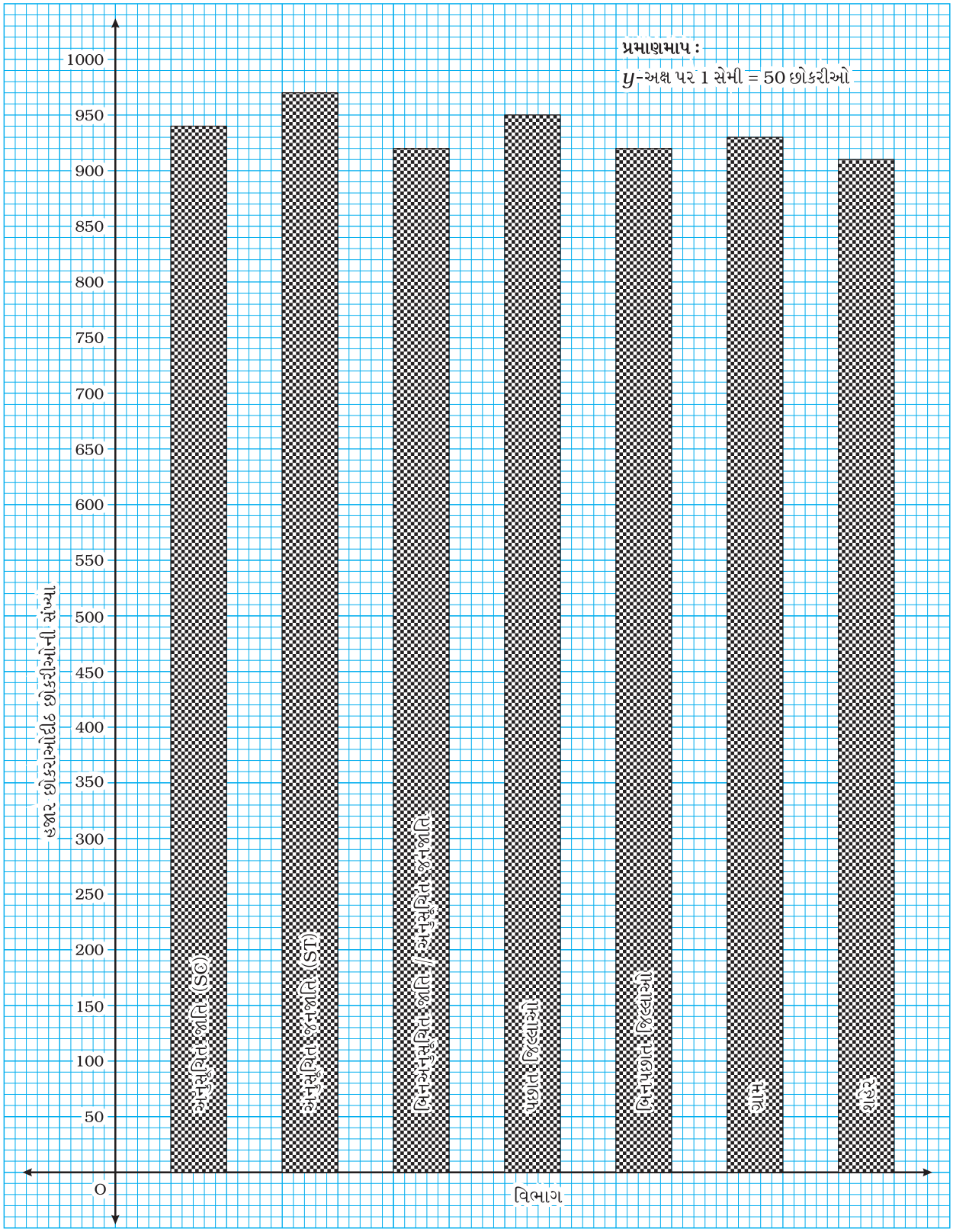
2. ભારતીય સમાજના વિવિધ વિભાગોમાં હજાર છોકરાઓદીઠ છોકરીઓની સંખ્યાઓની (લગભગ **10**ના ગુણિતની નજીક) માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

વિભાગ	હજાર છોકરાઓદીઠ છોકરીઓની સંખ્યા
અનુસૂચિત જાતિ **(SC)**	**940**
અનુસૂચિત જનજાતિ **(ST)**	**970**
બિનઅનુસૂચિત જાતિ / અનુસૂચિત જનજાતિ	**920**
પછાત જિલ્લાઓ	**950**
બિનપછાત જિલ્લાઓ	**920**
ગ્રામ	**930**
શહેર	**910**

(i) ઉપર્યુક્ત માહિતીને આધારે લંબાલેખ દોરો.

(ii) આલેખ પરથી કયા તારણ કાઢી શકાય તેની વર્ગમાં ચર્ચા કરો.

(i) ભારતીય સમાજના વિવિધ વિભાગોમાં હજાર છોકરાઓદીઠ છોકરીઓની સંખ્યા



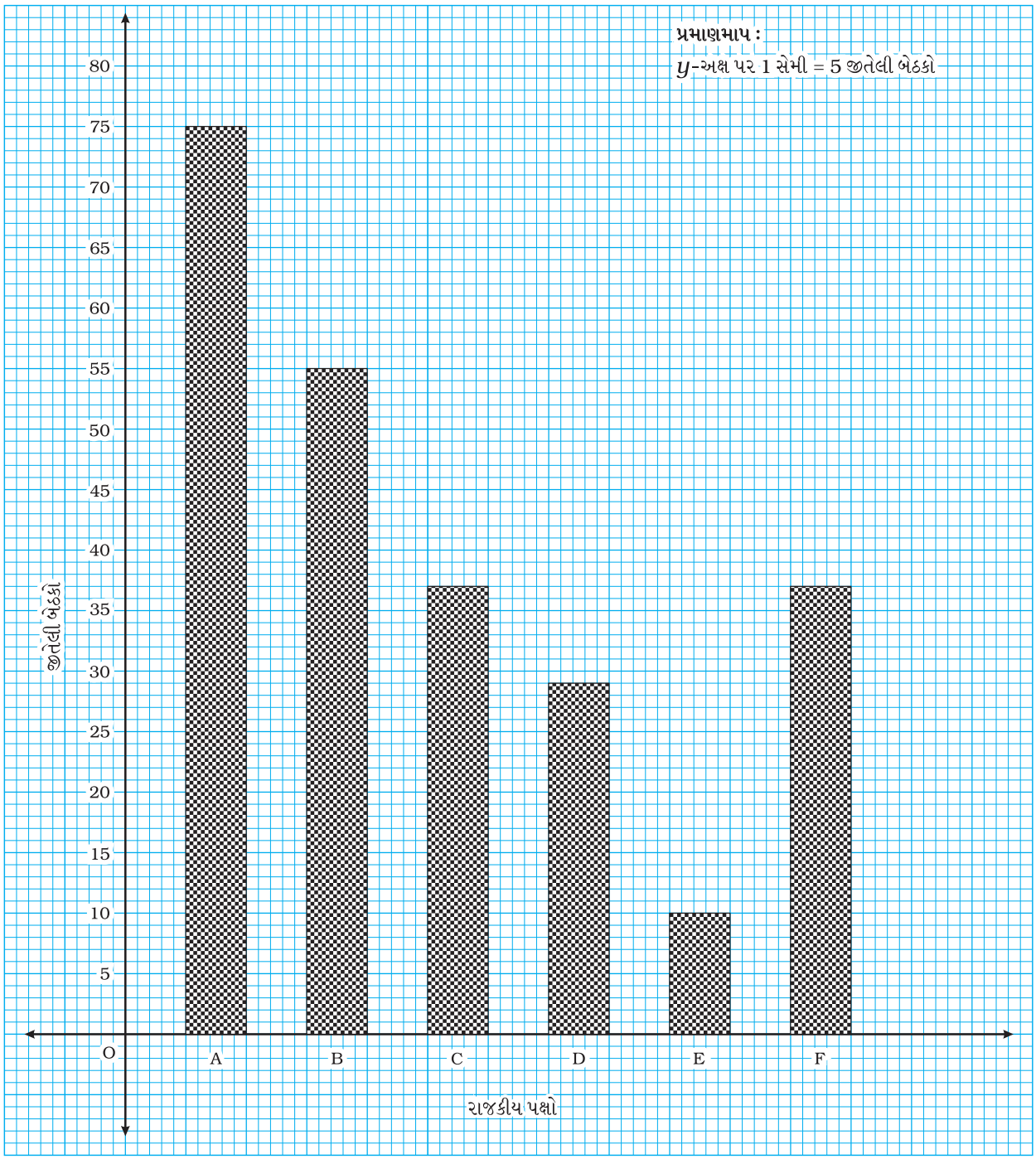
3. એક રાજ્યની વિધાનસભાની ચૂંટણીમાં જુદા જુદા રાજકીય પક્ષોએ જીતેલી બેઠકો માટે મતદાનનું પરિણામ નીચે પ્રમાણે છે :

રાજકીય પક્ષો	A	B	C	D	E	F
જીતેલી બેઠકો	75	55	37	29	10	37

(i) મતદાનનાં પરિણામોને દર્શાવતો એક લંબાલેખ દોરો.

(ii) કયો રાજકીય પક્ષ સૌથી વધુ બેઠકો જીત્યો?

(i) જુદા જુદા રાજકીય પક્ષોએ જીતેલી બેઠકો



(ii) રાજકીય પક્ષ **A** સૌથી વધુ બેઠકો જીત્યો.

4. એક છોડનાં **40** પાંદડાંની લંબાઈ મિલિમીટરમાં આપવામાં આવી છે અને તેનાથી મળતી માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

લંબાઈ (મિમીમાં)	પાંદડાંની સંખ્યા
118 – 126	3
127 – 135	5
136 – 144	9
145 – 153	12
154 – 162	5
163 – 171	4
172 – 180	2

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો એક સ્તંભાલેખ દોરો.
[સૂચન : સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

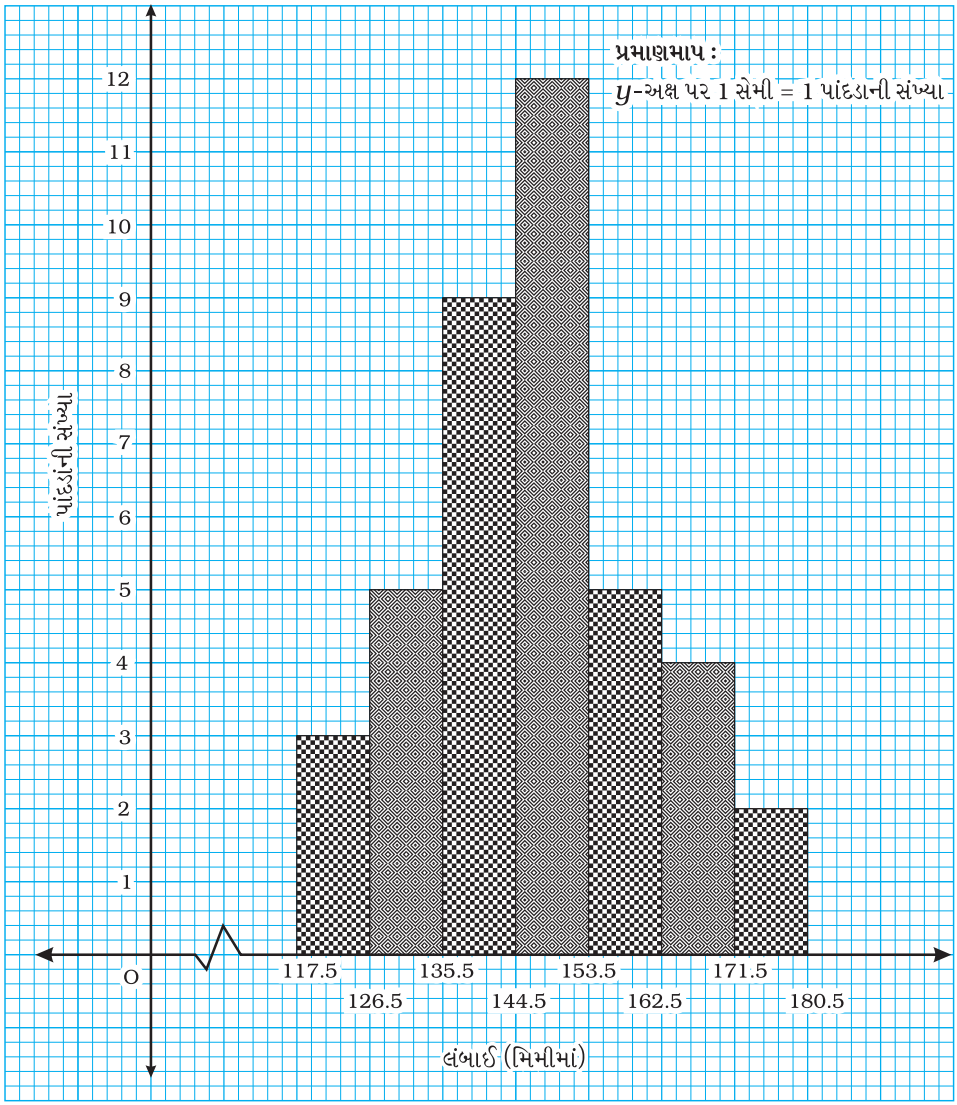
(ii) શું અન્ય રીતે આ માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત થઈ શકે?

(iii) **153** મિલિમીટર લંબાઈનાં પાંદડાંની સંખ્યા સૌથી વધુ છે. શું આ તારણ સાચું છે? કેમ?

વર્ગોને સતત બનાવતા નીચે પ્રમાણેનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક મળે :

લંબાઈ (મિમીમાં)	પાંદડાંની સંખ્યા
117.5 – 126.5	3
126.5 – 135.5	5
135.5 – 144.5	9
144.5 – 153.5	12
153.5 – 162.5	5
162.5 – 171.5	4
171.5 – 180.5	2

(i)



(ii) **હા,** આ માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત **આવૃત્તિ બહુકોણ** દ્વારા પણ થઈ શકે.

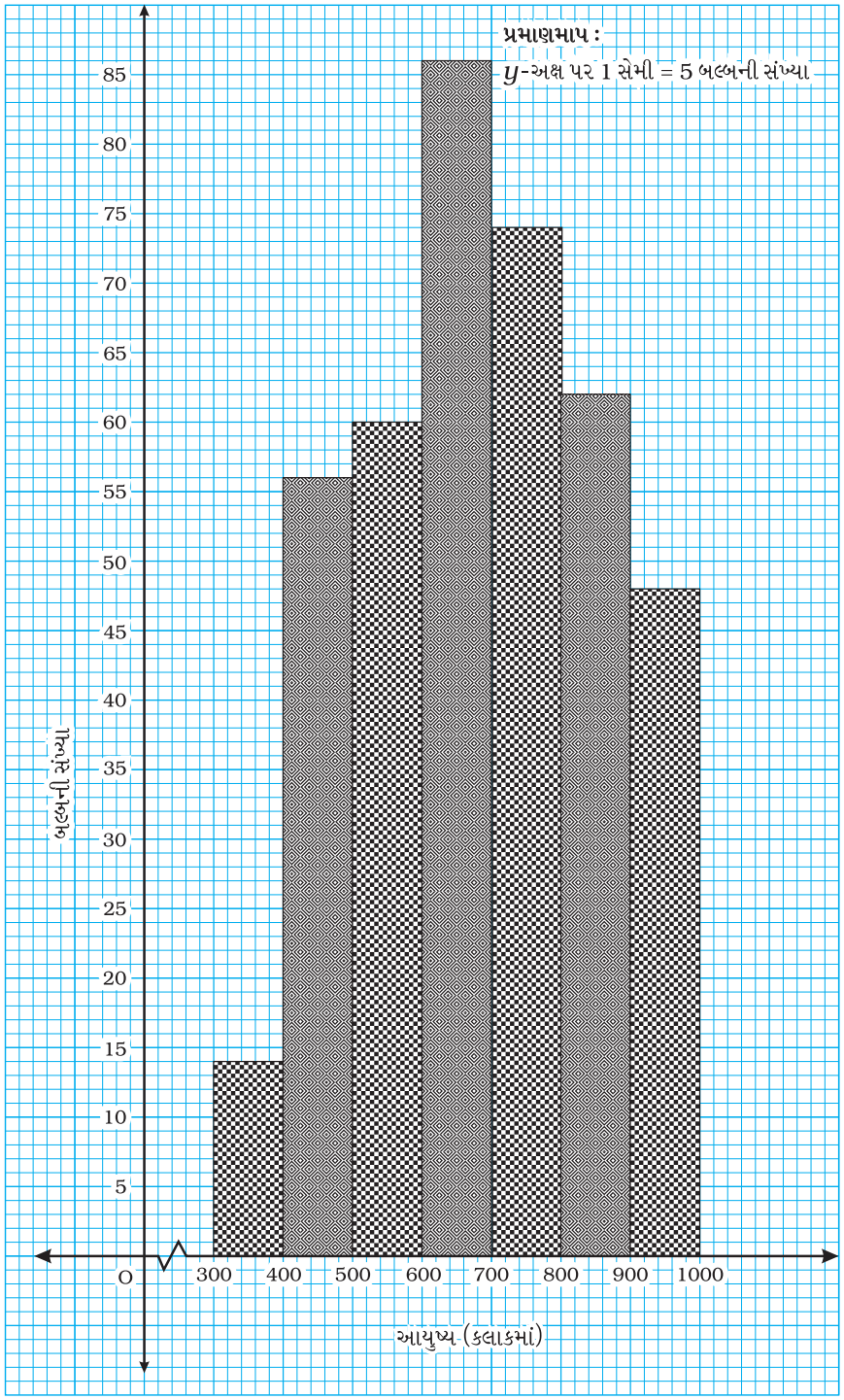
(iii) **ના, દર્શાવેલ તારણ સાચું નથી,** કારણ કે વર્ગ 145 – 153ની આવૃત્તિ 12 છે, પરંતુ તે દરેક અવલોકનની ચોક્કસ કિંમત કઈ હોય તે અંગે કાંઈ જ કહી શકાય નહીં.

5. નીચેના કોષ્ટકમાં **400** નિયોન બલ્બનું આયુષ્ય આપેલું છે :

આયુષ્ય (કલાકમાં)	બલ્બની સંખ્યા	આયુષ્ય (કલાકમાં)	બલ્બની સંખ્યા
300 – 400	14	700 – 800	74
400 – 500	56	800 – 900	62
500 – 600	60	900 – 1000	48
600 – 700	86		

(i) આપેલી માહિતીને સ્તંભાલેખની મદદથી દર્શાવો. **(ii)** કેટલા બલ્બનું આયુષ્ય **700** કલાક અથવા **700** કલાકથી વધુ છે?

(i) **400** નિયોન બલ્બનું આયુષ્ય (કલાકમાં)



(ii) વર્ગ 700 – 800, 800 – 900 અને 900 – 1000ની આવૃત્તિ અનુક્રમે 74, 62 અને 48 છે. માટે **184 (74 + 62 + 48)** બલ્બનું આયુષ્ય 700 કલાક અથવા 700 કલાકથી વધુ છે.

6. નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ અનુસાર તેમને બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવ્યા છે :

વિભાગ A		વિભાગ B	
ગુણ	આવૃત્તિ	ગુણ	આવૃત્તિ
0 – 10	3	0 – 10	5
10 – 20	9	10 – 20	19
20 – 30	17	20 – 30	15
30 – 40	12	30 – 40	10
40 – 50	9	40 – 50	1

બંને વિભાગોના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ એક જ આલેખમાં જુદા જુદા આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવો. બંને આવૃત્તિ બહુકોણનો અભ્યાસ કરી બંને વિભાગના વિદ્યાર્થીના દેખાવની તુલના કરો.

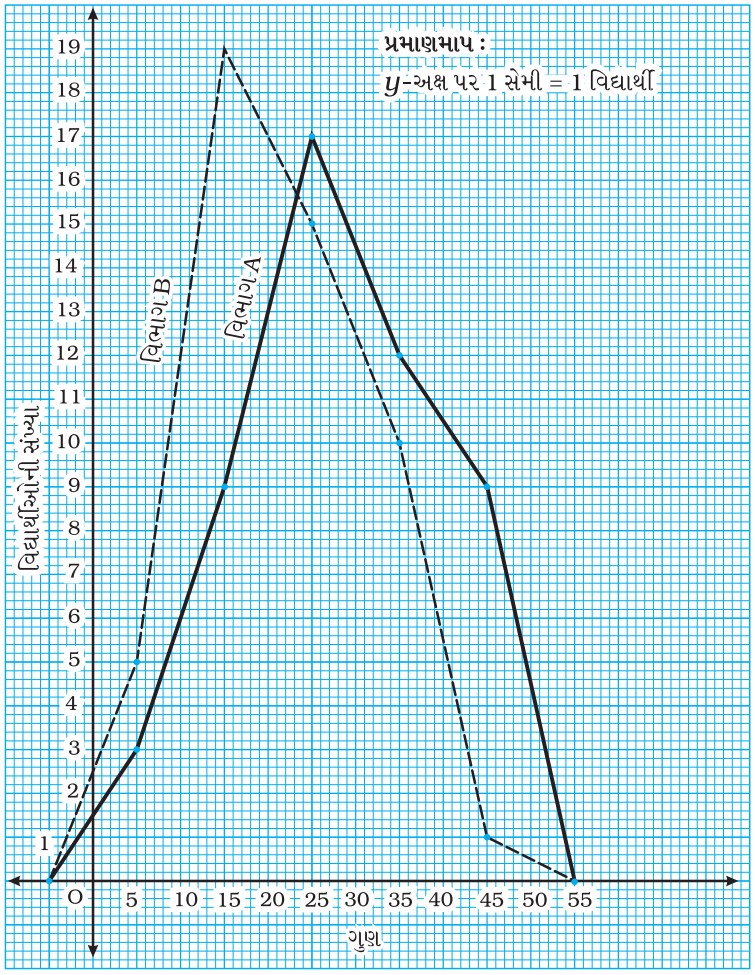
બંને વિભાગના આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે બંને વિભાગના વર્ગોની મધ્યકિંમતો શોધીને નીચે મુજબના કોષ્ટક બનાવીએ :

વિભાગ A

ગુણ	મધ્યકિંમત	આવૃત્તિ
0 – 10	5	3
10 – 20	15	9
20 – 30	25	17
30 – 40	35	12
40 – 50	45	9

વિભાગ B

ગુણ	મધ્યકિંમત	આવૃત્તિ
0 – 10	5	5
10 – 20	15	19
20 – 30	25	15
30 – 40	35	10
40 – 50	45	1



બંને વિભાગના વિદ્યાર્થીઓના દેખાવની તુલના કરતાં જણાય છે કે **વિભાગ Aના વિદ્યાર્થીઓનો દેખાવ વિભાગ Bના વિદ્યાર્થીઓના દેખાવ કરતાં ચડિયાતો છે.**

7. એક ક્રિકેટ-મૅચમાં બે ટીમો **A** અને **B** દ્વારા પ્રથમ **60** બૉલમાં કરેલા રનની માહિતી નીચે નોંધવામાં આવી છે :

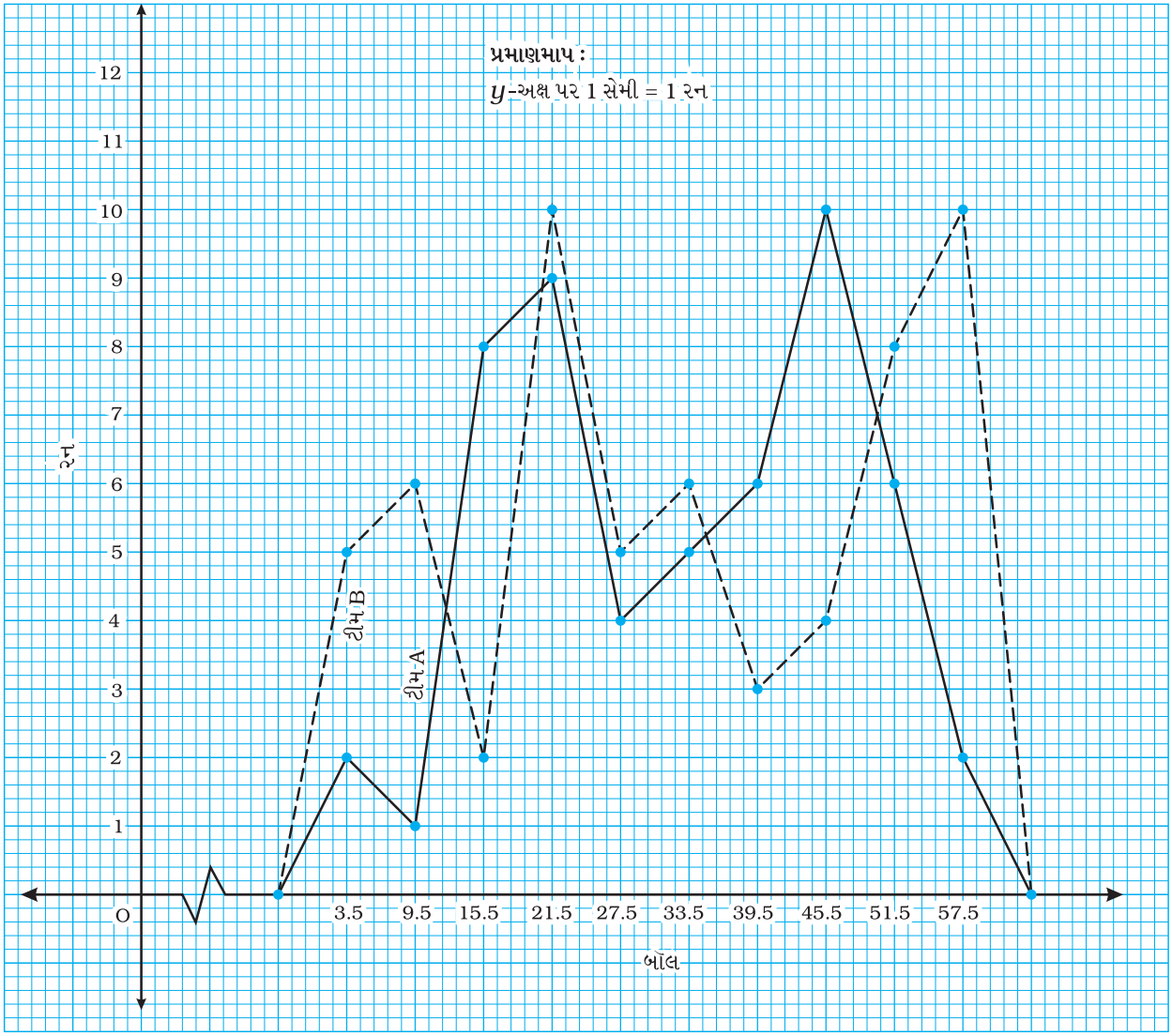
બૉલની સંખ્યા	ટીમ A	ટીમ B	બૉલની સંખ્યા	ટીમ A	ટીમ B
1 – 6	2	5	31 – 36	5	6
7 – 12	1	6	37 – 42	6	3
13 – 18	8	2	43 – 48	10	4
19 – 24	9	10	49 – 54	6	8
25 – 30	4	5	55 – 60	2	10

એક જ આલેખપત્ર પર બંને ટીમોની માહિતીને આવૃત્તિ બહુકોણની મદદથી દર્શાવો.

[સૂચન : સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

બૉલની સંખ્યા	મધ્યકિંમત	ટીમ A	ટીમ B	બૉલની સંખ્યા	મધ્યકિંમત	ટીમ A	ટીમ B
0.5 – 6.5	3.5	2	5	30.5 – 36.5	33.5	5	6
6.5 – 12.5	9.5	1	6	36.5 – 42.5	39.5	6	3
12.5 – 18.5	15.5	8	2	42.5 – 48.5	45.5	10	4
18.5 – 24.5	21.5	9	10	48.5 – 54.5	51.5	6	8
24.5 – 30.5	27.5	4	5	54.5 – 60.5	57.5	2	10

ટીમ A અને ટીમ B એ પ્રથમ 60 બૉલમાં કરેલા રન



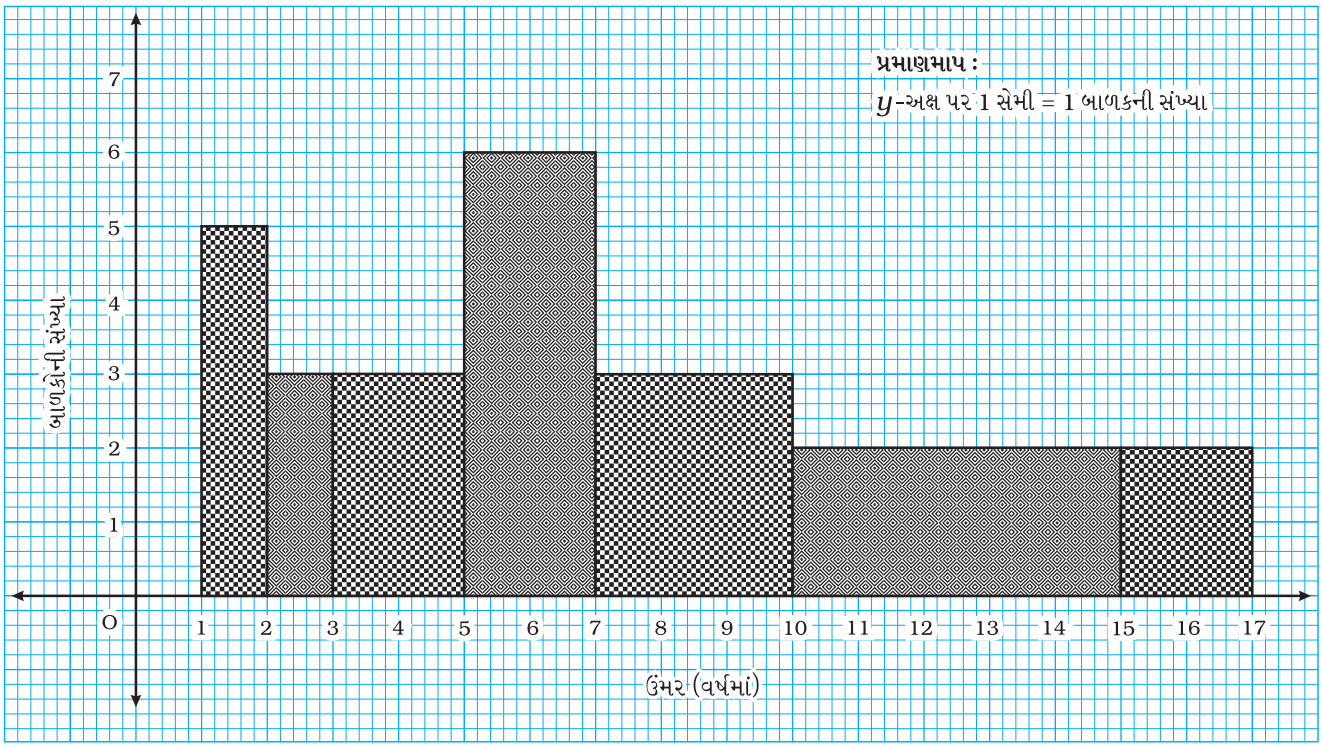
8. એક બગીચામાં રમતાં જુદાં જુદાં વય-જૂથનાં બાળકોની સંખ્યાનું યાદચ્છિક સર્વેક્ષણ કરવાથી નીચે પ્રમાણેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ :

ઉંમર (વર્ષમાં)	બાળકોની સંખ્યા
1 – 2	5
2 – 3	3
3 – 5	6
5 – 7	12
7 – 10	9
10 – 15	10
15 – 17	4

ઉપર્યુક્ત માહિતીને દર્શાવતો એક સ્તંભાલેખ દોરો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 – 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 – 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 – 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 – 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 – 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 – 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 – 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

બગીચામાં રમતાં જુદાં જુદાં વય-જૂથનાં બાળકો



9. એક સ્થાનિક ટેલિફોન ડિરેક્ટરીમાંથી યાદચ્છિક રીતે **100** અટક પસંદ કરવામાં આવી. તેમાંથી અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ પ્રાપ્ત થયું :

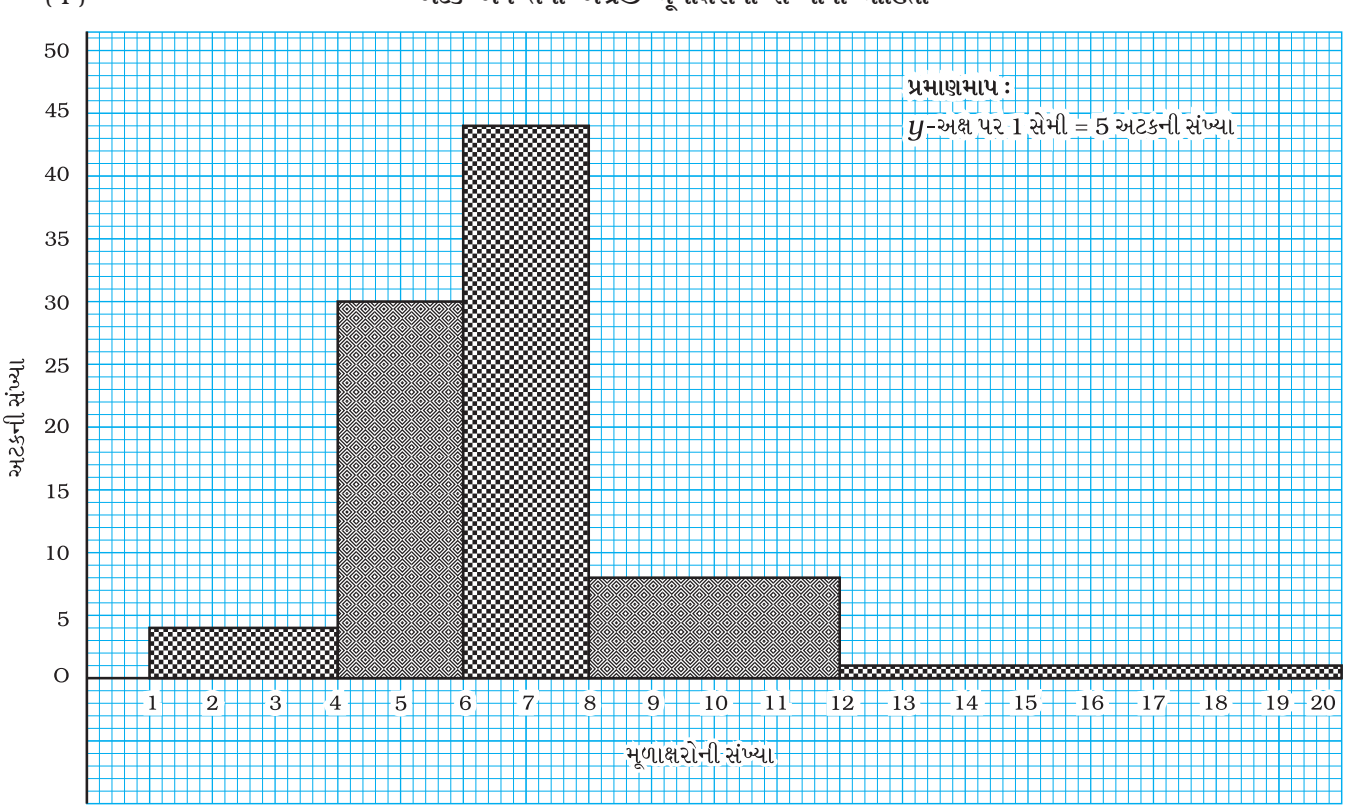
મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	અટકની સંખ્યા
1 – 4	**6**
4 – 6	**30**
6 – 8	**44**
8 – 12	**16**
12 – 20	**4**

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો સ્તંભાલેખ દોરો.

(ii) જે વર્ગમાં સૌથી વધુ સંખ્યામાં અટક છે, તે વર્ગ શોધીને લખો.

મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	અટકની સંખ્યા	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 – 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 – 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 – 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 – 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 – 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

(i)



(ii) વર્ગ **6 – 8**માં સૌથી વધુ સંખ્યામાં અટક છે.

દૃઢીકરણ માટેના દાખલા

1. એક શાળામાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓની ધોરણ પ્રમાણેની કુલ સંખ્યા નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે. આપેલી માહિતીને લંબાલેખ દ્વારા રજૂ કરો.

ધોરણ	પાંચમું	છઠ્ઠું	સાતમું	આઠમું	નવમું	દસમું
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	510	480	420	380	360	250

2. 100 ગુણની એક પરીક્ષામાં 50 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે. માહિતીને સ્તંભાલેખ દ્વારા રજૂ કરો.

મેળવેલા ગુણ	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	1	4	5	8	12	10	6	4	50

3. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી સ્તંભાલેખ રચો :

વર્ગ	10 – 15	15 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 60	60 – 100
આવૃત્તિ	5	8	20	16	20	24

4. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આવૃત્તિ બહુકોણ રચો :

વર્ગ	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
આવૃત્તિ	4	6	10	8	6	2

5. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે સ્તંભાલેખ તૈયાર કરો :

વર્ગ	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35
આવૃત્તિ	8	6	10	4	3

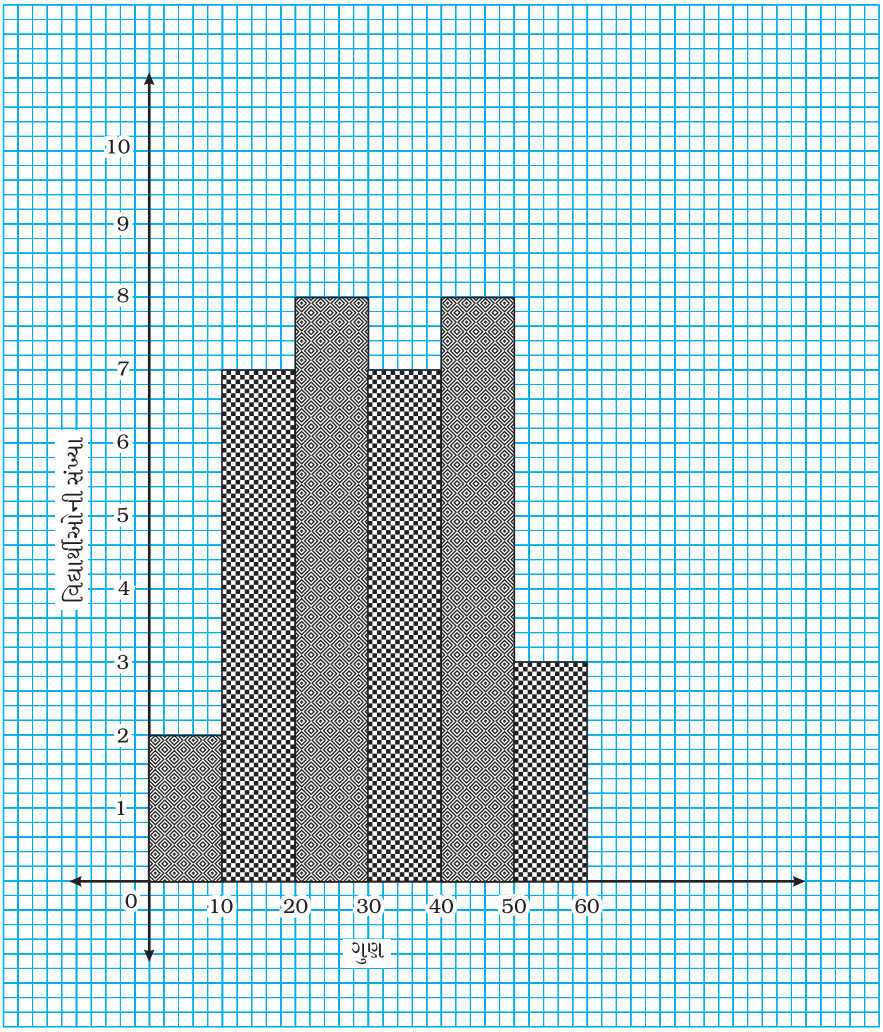
6. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે સ્તંભાલેખ તૈયાર કરો :

વર્ગ	10 – 15	15 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 55	55 – 75	75 – 100
આવૃત્તિ	8	14	20	28	30	24	10

7. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે આવૃત્તિ બહુકોણ તૈયાર કરો :

વર્ગ	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24
આવૃત્તિ	3	5	8	6	4	2

8. 60 ગુણની પરીક્ષામાં 35 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણના આધારે નીચેનો આલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો :



ઉપરના સ્તંભાલેખને ધ્યાનથી જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) આપેલ આલેખનું પ્રમાણમાપ લખો.

(2) 20થી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી છે?

(3) 30થી 50 ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી છે?

(4) સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કયા વર્ગ અંતરાલમાં છે?

9. 50 વિદ્યાર્થીઓની પૂર્ણાંક સેન્ટિમીટરમાં માપવામાં આવેલી ઊંચાઈ લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે. તે માહિતીના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
150 – 155	12
155 – 160	9
160 – 165	14
165 – 170	10
170 – 175	5

(1) વર્ગ 155 – 160ની મધ્યકિંમત જણાવો.

(2) કેટલા વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 165 સેમી અથવા તેનાથી વધારે હશે?

(3) કેટલા વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 150 સેમીથી 160 સેમીની વચ્ચે હશે?

(4) ઉપર આપેલી માહિતીને કયા આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય?

10. કોઈ શહેરના વાતાવરણમાં સલ્ફર ડાયૉક્સાઇડની સાંદ્રતા ppm(parts per million)માં શોધવા માટેનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો. તેની 30 દિવસમાં મળેલી માહિતી લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક આપેલ છે, તેના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

સલ્ફર ડાયૉક્સાઇડની સાંદ્રતા (ppmમાં)	દિવસોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

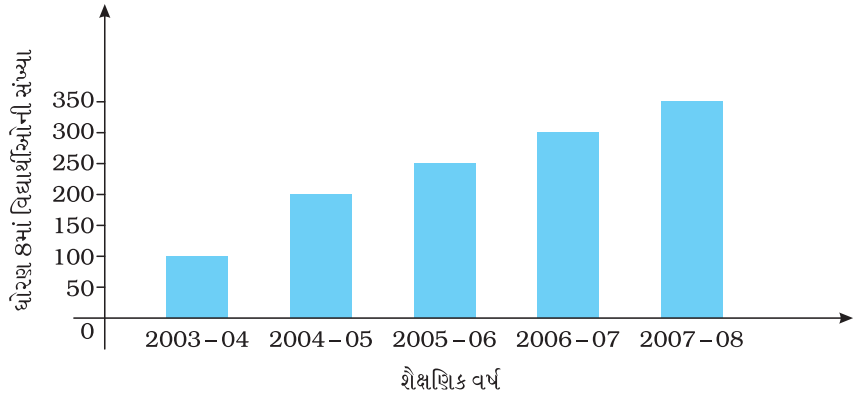
(1) વર્ગ 0.04 – 0.08ની મધ્યકિંમત જણાવો.

(2) વર્ગ 0.20 – 0.24ની વર્ગલંબાઈ જણાવો.

(3) કેટલા દિવસ સલ્ફર ડાયૉક્સાઇડની સાંદ્રતા 0.12 ppm કે તેનાથી વધુ રહી હશે?

(4) કેટલા દિવસ સલ્ફર ડાયૉક્સાઇડની સાંદ્રતા 0.08 ppmથી ઓછી રહી હશે?

11.



ઉપરોક્ત લંબાલેખના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) આપેલ આલેખ કઈ માહિતી દર્શાવે છે, તે જણાવો.

(2) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાં મહત્તમ વધારો થયો છે?

(3) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા મહત્તમ છે?

(4) નીચે આપેલ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે જણાવો :

2005 – 06 દરમિયાન વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 2003 – 04 કરતાં બમણી છે.

જવાબો

8. (1) y-અક્ષ પર 1 સેમી = 1 વિદ્યાર્થી (2) 2 + 7 = 9 વિદ્યાર્થીઓ (3) 7 + 8 = 15 વિદ્યાર્થીઓ (4) 20 – 30 અને 40 – 50.

9. (1) 157.5 (2) 10 + 5 = 15 વિદ્યાર્થીઓની (3) 12 + 9 = 21 વિદ્યાર્થીઓની (4) સ્તંભાલેખ અથવા આવૃત્તિ બહુકોણ

10. (1) 0.06 (2) 0.04 (3) 2 + 4 + 2 = 8 દિવસ (4) 4 + 9 = 13 દિવસ

11. (1) શાળામાં વિવિધ શૈક્ષણિક વર્ષોમાં ધોરણ 8માં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (2) વર્ષ 2004 – 05 (3) વર્ષ 2007 – 08 (4) ખોટું

હેતુલક્ષી પ્રશ્નોત્તર

1. કૌંસમાં આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) વર્ગ 80 – 100ની મધ્યકિંમત ..... છે.

(90, 95, 80)

(2) વર્ગ 6.5 – 12.5ની વર્ગલંબાઈ ..... છે.

(6, 6.5, 5)

(3) નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ દર્શાવવા એક સ્તંભાલેખ દોરવો છે :

વર્ગ	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 100
આવૃત્તિ	10	15	20	25

વર્ગ 60 – 100ની સપ્રમાણ આવૃત્તિ ..... છે.

(20, 12.5, 25)

(4) આવૃત્તિ બહુકોણમાં x-અક્ષ પર ..... દર્શાવવામાં આવે છે.

(વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ, વર્ગલંબાઈ, વર્ગની મધ્યકિંમત)

2. નીચેના પ્રત્યેક પ્રશ્નનો જવાબ *એક* સંખ્યા અથવા શબ્દ અથવા વાક્યમાં આપો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) વર્ગ 150 – 160ની ઊર્ધ્વસીમા જણાવો.

(2) આપેલ વર્ગની મધ્યકિંમત શોધવાનું સૂત્ર જણાવો.

(3) વર્ગ 30 – 40ની અધઃસીમા જણાવો.

(4) વર્ગલંબાઈ શોધવાનું સૂત્ર જણાવો.

(5) સ્તંભાલેખ દોરવા માટે x-અક્ષ પર શું દર્શાવવામાં આવે છે?

3. દરેક પ્રશ્નની નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરીને જવાબ લખો : *(ફક્ત અંતિમ જવાબ)*

(1) સમાન વર્ગલંબાઈ ધરાવતા એક આવૃત્તિ-વિતરણના બે ક્રમિક વર્ગોની મધ્યકિંમત 72 અને 77 હોય, તો વર્ગલંબાઈ ..... હોય.

A. 5 B. 2.5 C. 74.5 D. 149

(2) વર્ગ 70 – 90ની મધ્યકિંમત ..... છે.

A. 20 B. 70 C. 80 D. 90

(3) વર્ગ 50.5 – 55.5ની વર્ગલંબાઈ ..... છે.

A. 4 B. 5 C. 6 D. 10

(4) સ્તંભાલેખમાં y-અક્ષ પર ..... દર્શાવવામાં આવે છે.

A. સીમાબિંદુઓ B. વર્ગલંબાઈ

C. મધ્યકિંમત D. આવૃત્તિઓ

4. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે લખો :

(1) આપેલ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમાના તફાવતને મધ્યકિંમત કહે છે.

(2) આવૃત્તિ બહુકોણમાં y-અક્ષ પર આવૃત્તિઓ દર્શાવવામાં આવે છે.

(3) નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ દર્શાવવા એક સ્તંભાલેખ દોરવો છે :

વર્ગ	10 – 15	15 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 60
આવૃત્તિ	5	8	20	16	20

વર્ગ 30 – 40ની સપ્રમાણ આવૃત્તિ 8 છે.

(4) વર્ગ 162.5 – 171.5ની અધઃસીમા 171.5 છે.

જવાબો

1. (1) 90 (2) 6 (3) 12.5 (4) વર્ગની મધ્યકિંમત

2. (1) 160 (2) $\frac{\text{ઊર્ધ્વસીમા + અધઃસીમા}}{2}$ (3) 30 (4) ઊર્ધ્વસીમા – અધઃસીમા (5) વર્ગનાં સીમાબિંદુઓ

3. (1) A. 5 (2) C. 80 (3) B. 5 (4) D. આવૃત્તિઓ

4. (1) ખોટું (2) ખરું (3) ખરું (4) ખોટું

પ્રમેય વિભાગ
(THEOREM SECTION)

પ્રકરણ 6

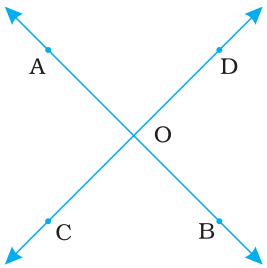
પૂર્વધારણા 6.1 : જે કિરણનું ઉદ્‌ભવબિંદુ રેખા પર હોય તેવા કિરણ અને રેખાથી બનતા બંને ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.

પૂર્વધારણા 6.2 : જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે.

પ્રમેય 6.1 : પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.

પક્ષ : રેખાઓ AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય : $\angle AOC = \angle BOD$ તથા $\angle AOD = \angle BOC$



સાબિતી : કિરણ OA એ રેખા CD પર આવેલ છે.

$\therefore \angle AOC + \angle AOD = 180°$

(રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) ... ... (1)

તેવી જ રીતે, કિરણ OD એ રેખા AB પર આવેલ છે.

$\therefore \angle AOD + \angle BOD = 180°$ ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી,

$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$

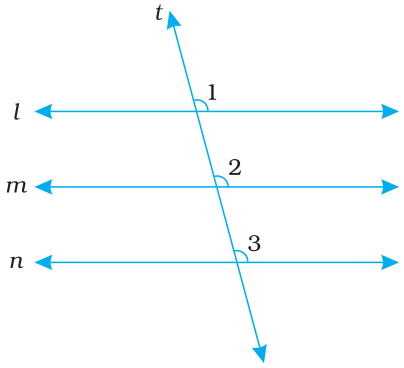
$\therefore \angle AOC = \angle BOD$

આ જ પ્રમાણે, $\angle AOD = \angle BOC$ પણ સાબિત થાય.

પ્રમેય 6.2 : જે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

પક્ષ : $m \parallel l$ અને $n \parallel l$

સાધ્ય : $m \parallel n$



સાબિતી : l, m અને nને છેદતી એક છેદિકા t દોરો.

$m \parallel l$ અને t છેદિકા છે.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (અનુકોણ)

$n \parallel l$ અને t છેદિકા છે.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ (અનુકોણ)

$\therefore \angle 2 = \angle 3$

પરંતુ, $\angle 2$ અને $\angle 3$ એ રેખાઓ m અને nની છેદિકા t દ્વારા બનતા અનુકોણો છે અને તેઓ સમાન છે.

$\therefore m \parallel n$

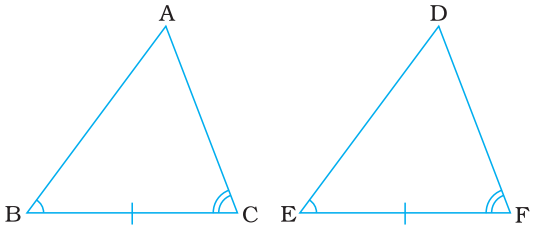
પ્રકરણ 7

પૂર્વધારણા 7.1 : (બાખૂબા એકરૂપતાનો નિયમ) : જો બે ત્રિકોણ માટે એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થાય.

પ્રમેય 7.1 : (ખૂબાખૂ એકરૂપતાની શરત) : જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

પક્ષ : ΔABC અને ΔDEFમાં $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને $BC = EF$

સાધ્ય : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



સાબિતી : AB અને DE માટે ત્રણ શક્યતાઓ છે :

1. AB = DE 2. AB > DE 3. AB < DE

વિકલ્પ 1 : ધારો કે, AB = DE છે.

જો AB = DE હોય, તો Δ ABC અને Δ DEFમાં,

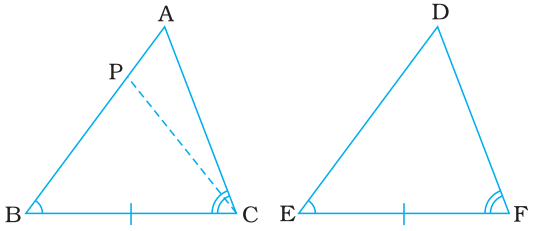
AB = DE, ∠ B = ∠ E અને BC = EF થાય.

માટે, બાખૂબા પૂર્વધારણા પરથી,

Δ ABC ≅ Δ DEF

વિકલ્પ 2 : ધારો કે, AB > DE છે.

અહીં, AB પર બિંદુ P એવું મળે કે જેથી PB = DE થાય.



હવે, Δ PBC અને Δ DEFમાં PB = DE,

∠ B = ∠ E અને BC = EF મળે.

આથી Δ PBC ≅ Δ DEF (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

∴ ∠ PCB = ∠ DFE

પરંતુ, પક્ષ મુજબ ∠ ACB = ∠ DFE

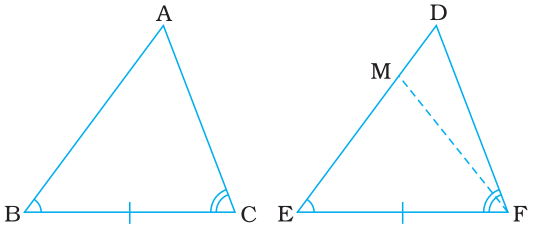
∴ ∠ ACB = ∠ PCB

આ માત્ર ત્યારે જ શક્ય છે કે જ્યારે P એ A પર આવેલ હોય, એટલે કે P = A અને AB = DE

∴ Δ ABC ≅ Δ DEF (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

વિકલ્પ 3 : ધારો કે, AB < DE છે.

અહીં, DE પર બિંદુ M એવું મળે કે જેથી AB = ME થાય.



હવે, Δ ABC અને Δ MEFમાં AB = ME,

∠ B = ∠ E અને BC = EF મળે.

આથી Δ ABC ≅ Δ MEF (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

∴ ∠ ACB = ∠ MFE

પરંતુ, પક્ષ મુજબ ∠ ACB = ∠ DFE.

∴ ∠ MFE = ∠ DFE

આ માત્ર ત્યારે જ શક્ય છે કે જ્યારે M એ D પર આવેલ હોય, એટલે કે M = D અને AB = DE

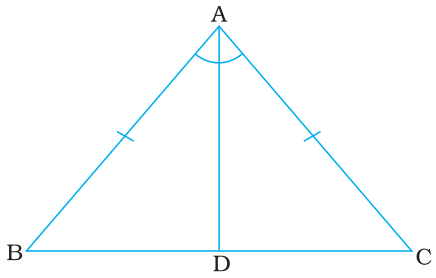
∴ Δ ABC ≅ Δ DEF (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

એકરૂપતાની ખૂખૂબા શરત : જો ખૂણાની બે જોડ અને અનુરૂપ બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય.

પ્રમેય 7.2 : ત્રિકોણની બે બાજુઓ સમાન હોય, તો તેમની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.

પક્ષ : Δ ABCમાં AB = AC

સાધ્ય : ∠ B = ∠ C



સાબિતી : Δ ABCના ∠ Aનો દ્વિભાજક રચો, જે BCને Dમાં છેદે.

Δ BAD અને Δ CADમાં,

AB = AC (પક્ષ)

∠ BAD = ∠ CAD (રચના મુજબ)

AD = AD (સામાન્ય બાજુ)

∴ બાખૂબા પૂર્વધારણા પ્રમાણે Δ BAD ≅ Δ CAD

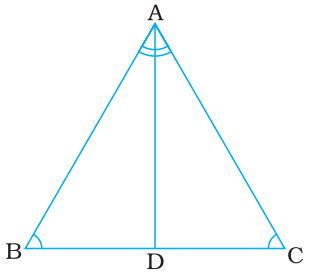
∴ ∠ ABD = ∠ ACD

∴ ∠ ABC = ∠ ACB, એટલે કે, ∠ B = ∠ C

પ્રમેય 7.3 : ત્રિકોણના સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.

પક્ષ : Δ ABCમાં ∠ B = ∠ C

સાધ્ય : AB = AC



સાબિતી : Δ ABCના ∠ Aનો દ્વિભાજક દોરો, જે BCને Dમાં છેદે.

Δ BAD અને Δ CADમાં,

$\angle ABD = \angle ACD$ (પક્ષ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (રચના મુજબ)

$AD = AD$ (સામાન્ય બાજુ)

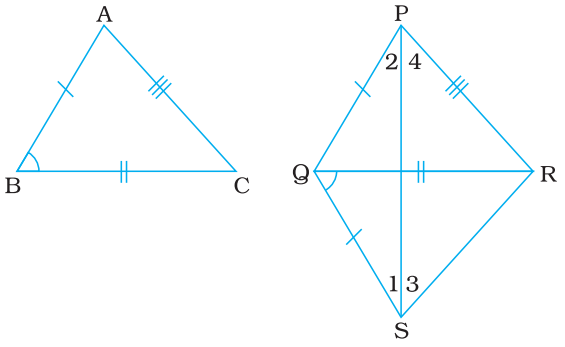
$\therefore$ એકરૂપતાની ખૂખૂબા શરત મુજબ, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$

$\therefore AB = AC$

પ્રમેય 7.4 : (બાબાબા એકરૂપતાની શરત) : જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય.

પક્ષ : ΔABC અને ΔPQRમાં $AB = PQ$, $BC = QR$ અને $AC = PR$

સાધ્ય : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



સાબિતી : રેખાખંડ QS એવી રીતે દોરો, જેથી $QS = BA$ અને $\angle ABC = \angle SQR$ થાય.

ΔABC અને ΔSQRમાં,

$AB = SQ$, $BC = QR$ અને $\angle B = \angle Q$ હોવાથી,

$\Delta ABC \cong \Delta SQR$ (બાખૂબા)

$\therefore AC = SR$ અને $\angle BAC = \angle QSR$ ... ... (1)

હવે, $AB = SQ$ અને $AB = PQ$

$\therefore PQ = SQ$

$\therefore \Delta PQS$માં, $\angle 1 = \angle 2$ ... ... (2)

તે જ રીતે, $AC = SR$ અને $AC = PR$

$\therefore SR = PR$

$\therefore \Delta PRS$માં, $\angle 3 = \angle 4$ ... ... (3)

(2) અને (3)નો સરવાળો લેતાં,

$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$

$\therefore \angle QSR = \angle QPR$

પરંતુ (1) મુજબ, $\angle BAC = \angle QSR$

$\therefore \angle BAC = \angle QPR$

હવે, ΔABC અને ΔPQRમાં,

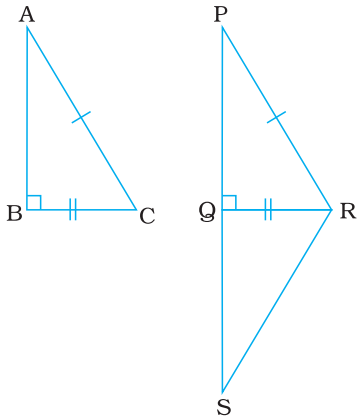
$AB = PQ$, $AC = PR$ અને $\angle BAC = \angle QPR$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (બાખૂબા)

પ્રમેય 7.5 : (કાકબા એકરૂપતાની શરત) : જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.

પક્ષ : ΔABC અને ΔPQRમાં $\angle B = \angle Q = 90°$, કર્ણ AC = કર્ણ PR અને $BC = QR$

સાધ્ય : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



સાબિતી : PQને Q તરફ લંબાવી તેના પર S બિંદુ એવું લો, જેથી $AB = SQ$ થાય.

$\angle PQR + \angle SQR = 180°$ (રૈખિક જોડ)

$\therefore 90° + \angle SQR = 180°$

$\therefore \angle SQR = 90°$

ΔABC અને ΔSQRમાં,

$AB = SQ$ (રચના); $\angle B = \angle Q = 90°$

અને $BC = QR$ હોવાથી,

$\Delta ABC \cong \Delta SQR$ (બાખૂબા)

$\therefore AC = SR$ અને $\angle A = \angle S$ ... ... (1)

વળી, $AC = PR$ (પક્ષ)

$\therefore SR = PR$

$\therefore \Delta RPS$માં $\angle S = \angle P$ ... ... (2)

(1) અને (2) પરથી, $\angle A = \angle P$ મળે.

હવે, ΔABC અને ΔPQRમાં,

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ અને $BC = QR$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ખૂખૂબા શરત)

નોંધ : પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીએ, તો નીચે મુજબની સાબિતી પણ આપી શકાય :

ΔABCમાં $\angle B = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 - BC^2$

ΔPQRમાં $\angle Q = 90°$

$\therefore PQ^2 = PR^2 - QR^2$

$\therefore PQ^2 = AC^2 - BC^2$ (પક્ષ મુજબ)

$\therefore PQ^2 = AB^2$

$\therefore PQ = AB$

હવે, ΔABC અને ΔPQRમાં,

$AB = PQ$, $\angle B = \angle Q$ અને $BC = QR$.

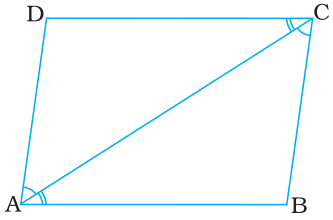
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (બાખૂબા)

પ્રકરણ 8

પ્રમેય 8.1 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ તથા $\Delta BCD \cong \Delta DAB$



સાબિતી : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણ AC દ્વારા ΔABC અને ΔCDA મળે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel CD$ અને AC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ (યુગ્મકોણ)

તે જ પ્રમાણે, $BC \parallel DA$ અને AC તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$ (યુગ્મકોણ)

હવે, ΔABC અને ΔCDAમાં,

$\angle CAB = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle DAC$ અને $AC = CA$

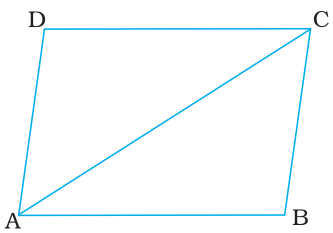
$\therefore$ ખૂબાખૂ મુજબ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

તે જ પ્રમાણે વિકર્ણ BD લેવાથી, $\Delta BCD \cong \Delta DAB$ સાબિત થાય.

પ્રમેય 8.2 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $AB = CD$ અને $BC = DA$



સાબિતી : ΔABC અને ΔCDAમાં,

$\angle CAB = \angle ACD$ ($AB \parallel CD$ની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$AC = CA$ (સામાન્ય બાજુ)

$\angle BCA = \angle DAC$ ($BC \parallel DA$ની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

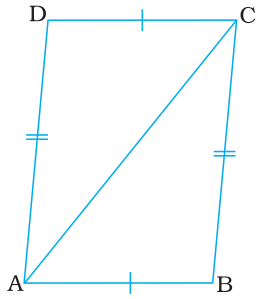
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ખૂબાખૂ)

$\therefore AB = CD$ અને $BC = DA$ (CPCT)

પ્રમેય 8.3 : જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB = CD$ અને $BC = DA$

સાધ્ય : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



સાબિતી : ΔABC અને ΔCDAમાં,

$AB = CD$ (પક્ષ)

$BC = DA$ (પક્ષ)

$AC = CA$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (બાબાબા)

$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle CAB$ અને $\angle ACD$ એ AB અને CDની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

$\therefore AB \parallel CD$

તે જ રીતે, $\angle BCA = \angle DAC$ (CPCT)

પરંતુ $\angle BCA$ અને $\angle DAC$ એ BC અને DAની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

$\therefore BC \parallel DA$

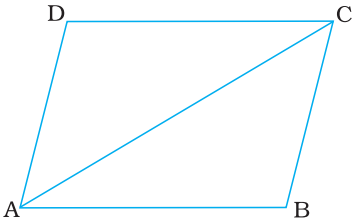
આમ, ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel CD$ અને $BC \parallel DA$.

માટે, ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પ્રમેય 8.4 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા સમાન છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$



સાબિતી : ΔABC અને ΔCDAમાં,

$AB = CD$ (પ્રમેય 8.2)

$BC = DA$ (પ્રમેય 8.2)

$AC = CA$ (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (બાબાબા)

$\therefore \angle ABC = \angle CDA$ (CPCT)

તે જ રીતે BD વિકર્ણ દ્વારા બનતા ΔBCD અને ΔDAB પણ એકરૂપ થાય.

$\therefore \angle BCD = \angle DAB$ (CPCT)

આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં

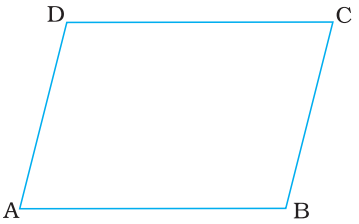
$\angle ABC = \angle CDA$ તથા $\angle BCD = \angle DAB$,

એટલે કે, $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$

પ્રમેય 8.5 : જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$

સાધ્ય : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



સાબિતી : ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$

(પક્ષ મુજબ $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$)

$\therefore 2(\angle A + \angle B) = 360°$

$\therefore \angle A + \angle B = 180°$

પરંતુ, $\angle A$ અને $\angle B$ એ BC અને ADની છેદિકા ABની એક જ તરફના અંતઃકોણ છે અને તેઓ પૂરક છે.

$\therefore BC \parallel AD$

વળી, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\therefore \angle A + \angle D + \angle A + \angle D = 360°$

(પક્ષ મુજબ $\angle A = \angle C$ અને $\angle B = \angle D$)

$\therefore 2(\angle A + \angle D) = 360°$

$\therefore \angle A + \angle D = 180°$

પરંતુ $\angle A$ અને $\angle D$ એ AB અને DCની છેદિકા ADની એક જ તરફના અંતઃકોણ છે અને તેઓ પૂરક છે.

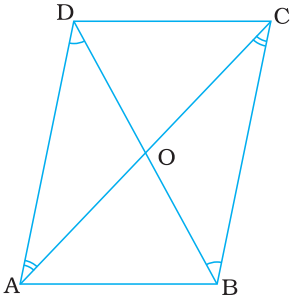
$\therefore AB \parallel DC$

આમ, ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel DC$ અને $BC \parallel AD$ હોવાથી ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પ્રમેય 8.6 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

પક્ષ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર Oમાં છેદે છે.

સાધ્ય : $OA = OC$ અને $OB = OD$



સાબિતી : ΔOAD અને ΔOCBમાં, $\angle OAD = \angle OCB$

($AD \parallel BC$ની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$\angle ODA = \angle OBC$

($AD \parallel BC$ની છેદિકા BD દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$AD = CB$ (પ્રમેય 8.2)

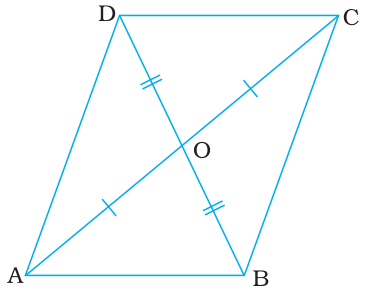
$\therefore$ ખૂબાખૂ મુજબ $\Delta OAD \cong \Delta OCB$

$\therefore OA = OC$ અને $OB = OD$ (CPCT)

પ્રમેય 8.7 : જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BD એકબીજાને Oમાં દુભાગે છે, એટલે કે $OA = OC$ અને $OB = OD$.

સાધ્ય : ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



સાબિતી : અહીં, ΔOAB અને ΔOCDમાં,

$OA = OC$ (પક્ષ)

$OB = OD$ (પક્ષ)

$\angle AOB = \angle COD$ (અભિકોણ)

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (બાખૂબા)

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle OAB$ અને $\angle OCD$ એ AB અને CDની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

$\therefore AB \parallel CD$

તે જ રીતે, બાખૂબા દ્વારા $\Delta OAD \cong \Delta OCB$ મળે અને તે પરથી $\angle OAD = \angle OCB$ મળે.

પરંતુ, $\angle OAD$ અને $\angle OCB$ એ AD અને BCની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ છે અને તેઓ સમાન છે.

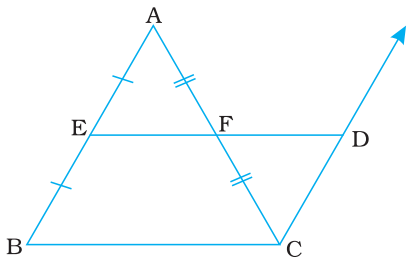
$\therefore AD \parallel BC$

આમ, ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel CD$ અને $AD \parallel BC$ હોવાથી ચતુષ્કોણ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પ્રમેય 8.8 : ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે. ઉપરાંત, તે રેખાખંડ ત્રીજી બાજુ કરતાં અડધો છે.

પક્ષ : ΔABCમાં E અને F એ અનુક્રમે AB અને ACના મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય : $EF \parallel BC$ અને $EF = \frac{1}{2}BC$



સાબિતી : બિંદુ Cમાંથી ABને સમાંતર હોય તેવી એક રેખા દોરો, જે રેખા EFને D બિંદુમાં છેદે.

ΔAFE અને ΔCFDમાં,

$AF = CF$ (F એ ACનું મધ્યબિંદુ છે.)

$\angle FAE = \angle FCD$ (AB ∥ CDની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$\angle AFE = \angle CFD$ (અભિકોણ)

$\therefore \Delta AFE \cong \Delta CFD$ (ખૂબાખૂ)

$\therefore AE = CD$ અને $EF = DF$ (CPCT)

વળી, $AE = EB$ (E એ ABનું મધ્યબિંદુ છે.)

$\therefore BE = CD$

હવે, $BE = CD$ અને $BE \parallel CD$ (રચના મુજબ)

$\therefore$ ચતુષ્કોણ EBCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore ED \parallel BC$

$\therefore EF \parallel BC$

વળી, $ED = BC$

હવે, $EF = DF$ અને $EF + DF = ED$

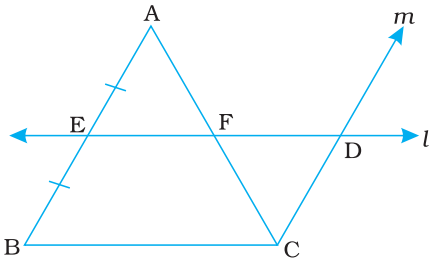
$\therefore EF = \frac{1}{2}ED$

$\therefore EF = \frac{1}{2}BC$

પ્રમેય 8.9 : ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

પક્ષ : ΔABCમાં E એ ABનું મધ્યબિંદુ છે. Eમાંથી દોરેલ રેખા l એ BCને સમાંતર છે અને ACને Fમાં છેદે છે.

સાધ્ય : AF = CF એટલે કે રેખા l ACને દુભાગે છે.



સાબિતી : Cમાંથી ABને સમાંતર હોય તેવી રેખા m દોરો તથા l અને mના છેદબિંદુને D નામ આપો.

ચતુષ્કોણ EBCDમાં $ED \parallel BC$ અને $EB \parallel DC$ હોવાથી ચતુષ્કોણ EBCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore EB = DC$

વળી, E એ ABનું મધ્યબિંદુ હોવાથી

$EB = EA$

$\therefore EA = DC$

ΔAFE અને ΔCFDમાં,

$EA = DC$

$\angle FAE = \angle FCD$ (AE ∥ CDની છેદિકા AC દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$\angle FEA = \angle FDC$ (AE ∥ CDની છેદિકા ED દ્વારા બનતા યુગ્મકોણ)

$\therefore \Delta AFE \cong \Delta CFD$ (ખૂબાખૂ)

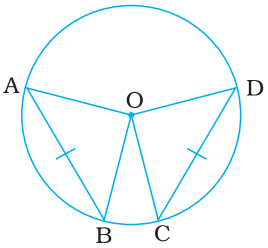
$\therefore AF = CF$ એટલે કે રેખા l ACને દુભાગે છે.

પ્રકરણ 9

પ્રમેય 9.1 : વર્તુળ(એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

પક્ષ : AB અને CD એ O કેન્દ્રિત વર્તુળની સમાન જીવાઓ છે, એટલે કે $AB = CD$.

સાધ્ય : $\angle AOB = \angle COD$



સાબિતી : Δ OAB અને Δ OCDમાં,

OA = OC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OB = OD (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

AB = CD (પક્ષ)

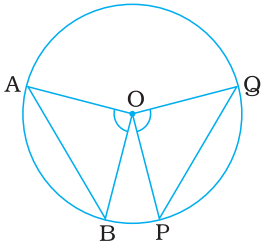
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (બાબાબા)

$\therefore \angle AOB = \angle COD$ (CPCT)

પ્રમેય 9.2 : જો વર્તુળ(એકરૂપ વર્તુળો)ની બે જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવાઓ AB અને PQ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે, એટલે કે $\angle AOB = \angle POQ$.

સાધ્ય : AB = PQ



સાબિતી : Δ AOB અને Δ POQમાં,

OA = OP (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OB = OQ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\angle AOB = \angle POQ$ (પક્ષ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta POQ$ (બાખૂબા)

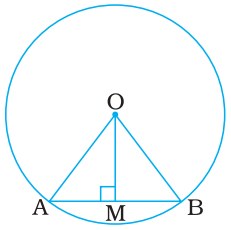
$\therefore$ AB = PQ (CPCT)

નોંધ : અહીં પ્રમેય 9.1 તથા 9.2ની એક જ વર્તુળ માટેની સાબિતી આપેલ છે. બંને પ્રમેય એકરૂપ વર્તુળો માટે પણ આ જ રીતે સાબિત થાય.

પ્રમેય 9.3 : વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવા AB પર કેન્દ્ર Oમાંથી દોરેલો લંબ રેખાખંડ OM છે.

સાધ્ય : OM એ ABને દુભાગે છે, એટલે કે MA = MB.



સાબિતી : Δ OMA તથા Δ OMBમાં,

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (પક્ષ)

OA = OB (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OM = OM (સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta OMA \cong \Delta OMB$ (કાકબા)

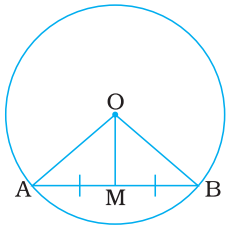
$\therefore$ MA = MB (CPCT)

એટલે કે, OM એ ABને દુભાગે છે.

પ્રમેય 9.4 : વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રિત વર્તુળની જીવા AB છે. Oથી પસાર થતી રેખા ABને Mમાં દુભાગે છે, એટલે કે MA = MB.

સાધ્ય : OM $\perp$ AB



સાબિતી : Δ OMA અને Δ OMBમાં,

OA = OB (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OM = OM (સામાન્ય બાજુ)

MA = MB (પક્ષ)

$\therefore \Delta OMA \cong \Delta OMB$ (બાબાબા)

$\therefore \angle OMA = \angle OMB$ (CPCT)

પરંતુ, $\angle OMA + \angle OMB = 180°$ (રૈખિક જોડ)

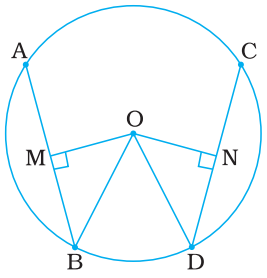
$\therefore \angle OMA = \angle OMB = \frac{180°}{2} = 90°$

$\therefore$ OM $\perp$ AB

પ્રમેય 9.5 : વર્તુળ(અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર(કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB અને CD સમાન જીવાઓ છે.

સાધ્ય : AB અને CD કેન્દ્ર Oથી સમાન અંતરે છે.



સાબિતી : કેન્દ્ર Oમાંથી ABને લંબ OM તથા CDને લંબ ON દોરો. ત્રિજ્યાઓ OB અને OD દોરો.

OM એ કેન્દ્ર Oમાંથી જીવા AB પરનો લંબ હોવાથી ABને દુભાગે છે.

$\therefore BM = \frac{1}{2}AB$

તે જ રીતે, ON એ કેન્દ્ર Oમાંથી જીવા CD પરનો લંબ હોવાથી CDને દુભાગે છે.

$\therefore DN = \frac{1}{2}CD$

હવે, $AB = CD$ (પક્ષ)

$\therefore \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\therefore BM = DN$

ΔBMO અને ΔDNOમાં,

$BM = DN$

$OB = OD$ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\angle M = \angle N = 90°$

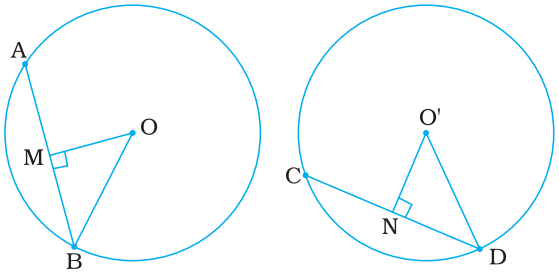
$\therefore \Delta BMO \cong \Delta DNO$ (કાકબા)

$\therefore OM = ON$ (CPCT)

પરંતુ, OM એ જીવા ABનું કેન્દ્ર Oથી અંતર છે અને ON એ જીવા CDનું કેન્દ્ર Oથી અંતર છે.

$\therefore$ AB અને CD કેન્દ્ર Oથી સમાન અંતરે છે.

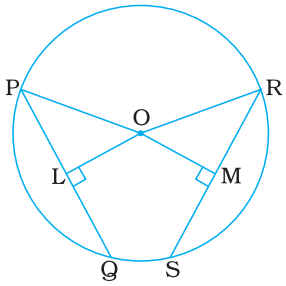
નોંધ : એકરૂપ વર્તુળોની સમાન જીવાઓ માટે પણ આ જ રીતે સાબિત થાય.



પ્રમેય 9.6 : વર્તુળ(એકરૂપ વર્તુળ)ના કેન્દ્ર(અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓની લંબાઈ સમાન હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં જીવાઓ PQ અને RS કેન્દ્રથી સમાન અંતરે છે.

સાધ્ય : $PQ = RS$



સાબિતી : કેન્દ્ર Oમાંથી જીવા PQ પર લંબ OL તથા જીવા RS પર લંબ OM દોરો.

$\therefore OL = OM$ (પક્ષ)

ત્રિજ્યાઓ OP અને OR દોરો.

ΔOLP અને ΔOMRમાં,

$OL = OM$ (પક્ષ)

$OP = OR$ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\angle L = \angle M = 90°$

$\therefore \Delta OLP \cong \Delta OMR$ (કાકબા)

$\therefore PL = RM$ (CPCT)

$\therefore 2PL = 2RM$

પરંતુ, $OL \perp PQ$ હોવાથી L એ PQનું મધ્યબિંદુ છે તથા $OM \perp RS$ હોવાથી M એ RSનું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore 2PL = PQ$ અને $2RM = RS$

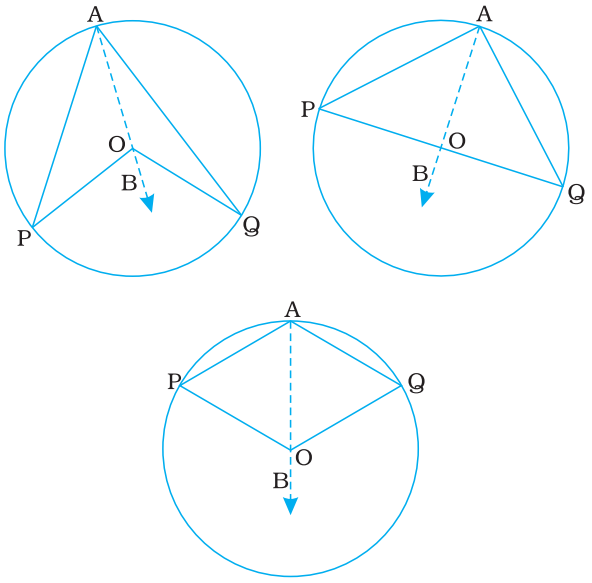
આથી $PQ = RS$

નોંધ : એકરૂપ વર્તુળોની અનુરૂપ કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ માટે પણ આ જ રીતે સાબિત થાય.

પ્રમેય 9.7 : વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.

પક્ષ : વર્તુળનું ચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ $\angle POQ$ આંતરે છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના બિંદુ A આગળ $\angle PAQ$ આંતરે છે.

સાધ્ય : $\angle POQ = 2\angle PAQ$



સાબિતી : ચાપ PQ માટે આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબ ત્રણ વિકલ્પ છે : ચાપ PQ લઘુચાપ છે. અથવા ચાપ PQ અર્ધવર્તુળ છે. અથવા ચાપ PQ ગુરુચાપ છે.

Aને કેન્દ્ર O સાથે જોડીને B સુધી લંબાવો.

દરેક વિકલ્પમાં $\angle BOQ$ એ ΔAOQનો બહિષ્કોણ થતો હોવાથી,

$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle OQA$

ΔOAQમાં $OA = OQ$ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\therefore \angle OAQ = \angle OQA$

$\therefore \angle BOQ = \angle OAQ + \angle OAQ$

$\therefore \angle BOQ = 2 \angle OAQ$ ... ... (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ ... ... (2)

(1) અને (2)નો સરવાળો લેતાં,

$\angle BOQ + \angle BOP = 2 \angle OAQ + 2 \angle OAP$

$\therefore \angle POQ = 2 (\angle OAQ + \angle OAP)$

$\therefore \angle POQ = 2 \angle PAQ$

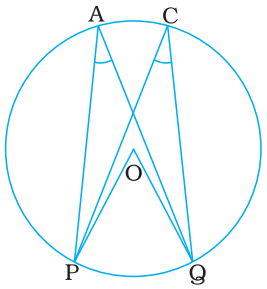
એક અગત્યનો ગુણધર્મ : અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

આ ગુણધર્મ પ્રમેય 9.7માં ચાપ PQને અર્ધવર્તુળ લેવાથી આપોઆપ સાબિત થાય છે.

પ્રમેય 9.8 : એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

પક્ષ : $\angle PAQ$ અને $\angle PCQ$ O કેન્દ્રિત વર્તુળના એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ છે.

સાધ્ય : $\angle PAQ = \angle PCQ$



સાબિતી : $\angle PAQ$ અને $\angle PCQ$ O કેન્દ્રિત વર્તુળના એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખણાઓ છે. માટે પ્રમેય 9.7 મુજબ,

$\angle POQ = 2 \angle PAQ$

અને $\angle POQ = 2 \angle PCQ$

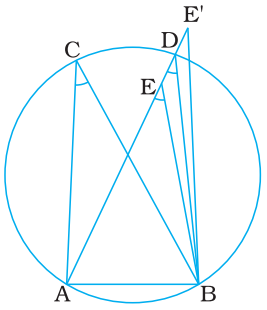
આથી $2 \angle PAQ = 2 \angle PCQ$

$\therefore \angle PAQ = \angle PCQ$

પ્રમેય 9.9 : જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજા બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.

પક્ષ : રેખાખંડ AB એ રેખા ABની એક જ બાજુએ આવેલ બિંદુઓ C અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે, એટલે કે $\angle ACB = \angle ADB$.

સાધ્ય : A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે, એટલે કે A, B, C અને D વૃત્તીય બિંદુઓ છે.



સાબિતી : A, B અને C અસમરેખ બિંદુઓ હોવાથી ત્રણેયમાંથી પસાર થતું અનન્ય વર્તુળ મળે.

ધારો કે, A, B અને Cમાંથી પસાર થતા વર્તુળ પર બિંદુ D નથી.

આથી તે વર્તુળ ADને (અથવા લંબાવેલ ADને) કોઈ બિંદુ E(અથવા E′)માં છેદશે.

$\therefore \angle ACB = \angle AEB$ (અથવા $\angle AE'B$)

(એક જ વૃત્તખંડના ખૂણા)

વળી, $\angle ACB = \angle ADB$ (પક્ષ)

$\therefore \angle ADB = \angle AEB$ (અથવા $\angle AE'B$)

પરંતુ, ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મ અનુસાર આ શક્ય નથી.

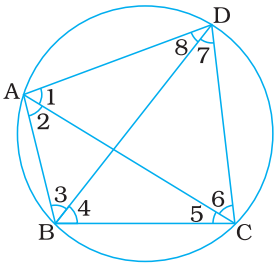
આથી આપણી ધારણા ખોટી છે, એટલે કે D એ A, B અને Cમાંથી પસાર થતા વર્તુળ પર જ છે.

આમ, A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.

પ્રમેય 9.10 : ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $\angle A + \angle C = 180°$ અને $\angle B + \angle D = 180°$



સાબિતી : ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણો AC અને BD દોરતાં, દરેક શિરોબિંદુ પર બે, એમ કુલ આઠ ખૂણા મળે.

તેમાં, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 3 = \angle 6$ અને $\angle 5 = \angle 8$ થાય. (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણા)

ચતુષ્કોણ ABCDમાં,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\therefore (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6) + (\angle 7 + \angle 8) = 360°$

$\therefore (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 6 + \angle 1) + (\angle 5 + \angle 6) + (\angle 2 + \angle 5) = 360°$

$\therefore 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360°$

$\therefore (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = 180°$

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

વળી, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

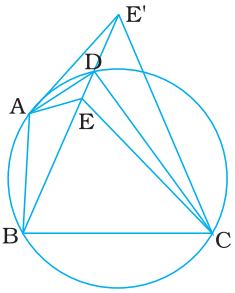
$\therefore 180° + \angle B + \angle D = 360°$

$\therefore \angle B + \angle D = 180°$

પ્રમેય 9.11 : જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

પક્ષ : ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A + \angle C = 180°$

સાધ્ય : ચતુષ્કોણ ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.



સાબિતી : ચતુષ્કોણ ABCDમાં $\angle A + \angle C = 180°$

$\therefore \angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C)$

$\therefore \angle B + \angle D = 360° - 180°$

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180°$ ... ...(1)

ધારો કે, A, B અને Cમાંથી પસાર થતું વર્તુળ Dમાંથી પસાર થતું નથી.

$\therefore$ A, B અને Cમાંથી પસાર થતું વર્તુળ BDને Eમાં (અથવા લંબાવેલ BDને E′માં) છેદે.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ ABCE (અથવા ABCE′) ચક્રીય ચતુષ્કોણ થાય.

$\therefore \angle ABC + \angle AEC$ (અથવા $\angle AE'C$) $= 180°$

... ...(2)

(1) અને (2) પરથી,

$\angle ADC = \angle AEC$ (અથવા $\angle AE'C$) મળે.

પરંતુ, ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મ મુજબ આ શક્ય નથી.

$\therefore$ આપણી ધારણા ખોટી છે.

$\therefore$ A, B અને Cમાંથી પસાર થતું વર્તુળ Dમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.

આદર્શ પ્રશ્નપત્રો

પ્રશ્નપત્ર 1 : પ્રથમ પરીક્ષા

[અભ્યાસક્રમ : પ્રકરણ 1થી 6]

સમય : 2 કલાક] **[કુલ ગુણ : 50**

સૂચનાઓ : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **35** પ્રશ્નો વિભાગ A, B, C અને Dમાં વહેંચાયેલા છે.
(2) પ્રશ્નોમાં જનરલ વિકલ્પો આપેલા છે.
(3) વિભાગની સૂચના સાથે જમણી બાજુના અંક તેના ગુણ દર્શાવે છે.
(4) જરૂર જણાય ત્યાં આકૃતિ દોરવી.
(5) સ્પષ્ટ વંચાય તેવું હસ્તલેખન કરવું.
(6) કૅલ્ક્યુલેટર, સ્માર્ટ વૉચનો ઉપયોગ કરવો નહીં.
(7) નવો વિભાગ નવા પાને લખવો.

વિભાગ A

સૂચના મુજબ જવાબ આપો : **15**
[પ્રશ્નક્રમાંક 1થી 15 – *પ્રત્યેકનો 1 ગુણ*]

વિધાન સાચું બને તે રીતે યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો : (પ્રશ્ન 1થી 4)

1. $\frac{5}{6}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ ..... છે.
A. અનંત આવૃત્ત B. અનંત અનાવૃત્ત
C. પૂર્ણાંક D. સાન્ત

2. જો $(a+3,\ 7)$ અને $(8,\ b-2)$ સમાન બિંદુઓ દર્શાવતા હોય, તો બિંદુ $(a,\ b)$ એ ..... ચરણમાં છે.
A. પ્રથમ B. દ્વિતીય C. તૃતીય D. ચતુર્થ

3. બે અંકની સંખ્યાનો એકમનો અંક $x-5$ અને દશકનો અંક $y+2$ હોય, તો તે સંખ્યા ..... છે.
A. $10y+x+25$ B. $10y+x-3$
C. $10x+y-48$ D. $10y+x+15$

4. $\angle$A લઘુકોણ છે. $\angle$Aના પૂરકકોણના માપ અને $\angle$Aના કોટિકોણના માપનો તફાવત ..... થાય.
A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

નીચે આપેલાં વિધાનો સાચાં બને તેમ કૌંસમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય જવાબ પસંદ કરી લખો : (પ્રશ્ન 5થી 8)

5. y-અક્ષ પર આવેલ બિંદુનો x-યામ ..... હોય. *(ધન, ઋણ, 0)*

6. બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 36 અને તફાવત 4 હોય, તો તે પૈકીની નાની સંખ્યા ..... છે. *(40, 32, 16)*

7. સિંધુખીણની સંસ્કૃતિમાં વપરાતી ઈંટોમાં લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈનો ગુણોત્તર ..... હતો.
(5 : 3 : 2, 4 : 4 : 2, 4 : 2 : 1)

8. 112°ના માપના ખૂણાના પૂરકકોણના કોટિકોણનું માપ ..... થાય. *(68°, 56°, 22°)*

નીચે આપેલાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે જણાવો : (પ્રશ્ન 9થી 11)

9. $3.484848\ldots$ને બીજી રીતે $3.\overline{48}$ લખાય.

10. બહુપદી $p(x)$ માટે જો $p(3)=0$ હોય, તો $x-3$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે.

11. $(6,\ 2)$ એ સમીકરણ $2x-3y=7$નો એક ઉકેલ છે.

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં કે શબ્દમાં કે આંકડામાં જવાબ આપો : (પ્રશ્ન 12 અને 13)

12. જો $x^{\frac{1}{8}}=49^{\frac{1}{16}}$ હોય, તો xની કિંમત શોધો.

13. બિંદુને કેટલા પરિમાણ હોય છે?

યોગ્ય જોડકાં જોડો : (પ્રશ્ન 14 અને 15)

વિભાગ A	વિભાગ B
14. બહુપદી $5x^3+4x^2+7x$નો ઘાત	a. 0
15. બહુપદી $4-x^2$માં xનો સહગુણક	b. 2
	c. 3

વિભાગ B

નીચે આપેલા 9 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 6 પ્રશ્નોના ટૂંકમાં ગણતરી કરી જવાબ આપો : **12**
[પ્રશ્નક્રમાંક 16થી 24 – *પ્રત્યેકના 2 ગુણ*]

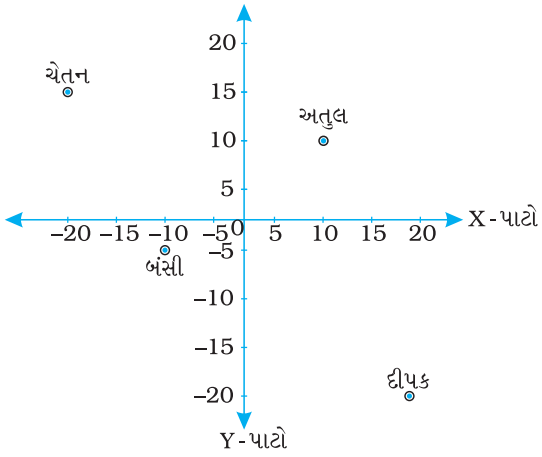
16. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની ચાર સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

17. $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$નો સરવાળો કરો.

18. આપેલ બહુપદી $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$ માટે $p(0)$ અને $p(2)$ શોધો.

19. જો $x - 1$ એ $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$નો અવયવ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

20.



શાળાના મેદાનની બરાબર વચ્ચે એક ઊભો અને એક આડો એમ બે પાટા દોરેલ છે. બંને પાટા (આડો પાટો X-પાટો અને ઊભો પાટો Y-પાટો) જ્યાં છેદે છે ત્યાંથી દરેક પાટા પર ધન દિશામાં તથા ઋણ દિશામાં 5 મીટરના અંતરે નિશાન કરેલ છે. ચાર વિદ્યાર્થીઓ અતુલ, બંસી, ચેતન અને દીપક તેમના નિશ્ચિત સ્થાને ઊભા છે.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) X-પાટાથી સૌથી નજીક કોણ ઊભું છે?

(2) Y-પાટાથી 20 મીટર અંતરે ઊભેલ વિદ્યાર્થીઓનાં નામ જણાવો.

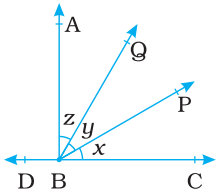
21. (1) બિંદુ $(0, -18)$ કયા કિરણ પર આવેલ છે?

(2) $m < 0$ અને $n > 0$ હોય, તો બિંદુ (m, n) કયા ચરણમાં હોય?

22. સમીકરણ $x + 2y = 6$ના ચાર ભિન્ન ઉકેલો મેળવો.

23. જો AC = BC થાય તેવું બિંદુ C બિંદુઓ A અને Bની વચ્ચે હોય, તો સાબિત કરો કે $AC = \frac{1}{2}AB$ છે. આકૃતિ દોરીને તેને સ્પષ્ટ કરો.

24. આપેલ આકૃતિમાં $AB \perp CD$ છે. જો $x : y : z = 4 : 5 : 6$ હોય, તો x, y અને zનાં માપ શોધો.



વિભાગ C

નીચે આપેલા 8 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 5 પ્રશ્નોના ગણતરી કરી જવાબ આપો : [પ્રશ્નક્રમાંક 25થી 32 – *પ્રત્યેકના 3 ગુણ*] 15

25. $\sqrt{9.3}$ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

26. $0.7\overline{52}$ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે તથા $q \neq 0$.

27. અવયવ પાડો : $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

28. (1) $(4a - 2b - 3c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

(2) $(5p - 3q)^3$ને વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખો.

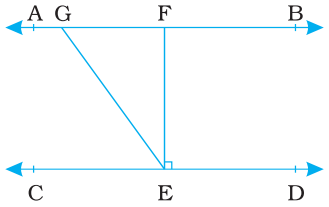
29. (1) નીચેનામાંથી કયાં બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ના ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી, તે ચકાસો :

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0)

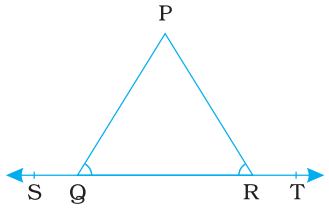
(2) ''નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી છે.'' આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો. (નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો.)

30. $\angle XYZ = 64°$ આપેલ છે અને XYને બિંદુ P સુધી લંબાવેલ છે. આપેલ સૂચના પરથી આકૃતિ દોરો. જો કિરણ YQ, $\angle ZYP$નો દ્વિભાજક હોય, તો $\angle XYQ$ અને વિપરીત $\angle QYP$નું માપ શોધો.

31. આપેલ આકૃતિમાં જો $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ અને $\angle GED = 126°$ છે, તો $\angle AGE$, $\angle GEF$ અને $\angle FGE$ મેળવો.



32. આપેલ આકૃતિમાં $\angle PQR = \angle PRQ$, તો સાબિત કરો કે $\angle PQS = \angle PRT$.



વિભાગ D

નીચે આપેલા 3 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 2 પ્રશ્નોની માગ્યા મુજબ ગણતરી કરી જવાબ આપો : 8

[પ્રશ્નક્રમાંક 33થી 35 – *પ્રત્યેકના 4 ગુણ*]

33. નીચે લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ દર્શાવેલ છે. તેમની સંભવિત લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો :

(1) ક્ષેત્રફળ : $25a^2 - 35a + 12$

(2) ક્ષેત્રફળ : $35y^2 + 13y - 12$

34. બિંદુઓ $(-2, 0)$ અને $(0, 3)$ નીચે આપેલ કયાં સમીકરણના ઉકેલ છે?

(1) $x - y = -5$ (2) $3x - 2y = -6$

35. પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણો સમાન હોય છે તેમ સાબિત કરો.

પ્રશ્નપત્ર 2 : દ્વિતીય પરીક્ષા

[અભ્યાસક્રમ : પ્રકરણ 7થી 10 અને પ્રથમ પરીક્ષાનો અભ્યાસક્રમ]

સમય : 2 કલાક] **[કુલ ગુણ : 50**

સૂચનાઓ : પ્રશ્નપત્ર **1** મુજબ.

વિભાગ A

સૂચના મુજબ જવાબ આપો : **15**

[પ્રશ્નક્રમાંક 1થી 15 – *પ્રત્યેકનો 1 ગુણ*]

વિધાન સાચું બને તે રીતે યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો : (પ્રશ્ન 1થી 4)

1. જો m અને n પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ હોય, તો ..... એ હંમેશાં પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા થાય.

A. $m+n$ B. $2m$ C. $4n$ D. m^2+n^2

2. $p(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$નું એક શૂન્ય ..... છે.

A. 1 B. 2 C. -2 D. -1

3. Δ ABCમાં $\angle B = \angle C$, BC = 5.2 સેમી અને AB = 4.8 સેમી હોય, તો Δ ABCની પરિમિતિ = ... સેમી.

A. 14.8 B. 15.2 C. 15.6 D. 14.4

4. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB જીવા છે. જો $\angle AOB = 60°$ હોય, તો ΔOAB ..... ત્રિકોણ છે.

A. સમદ્વિભુજ B. સમભુજ C. કાટકોણ D. વિષમભુજ

નીચે આપેલાં વિધાનો સાચાં બને તેમ કૌંસમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય જવાબ પસંદ કરી લખો : (પ્રશ્ન 5થી 8)

5. ચતુર્થ ચરણમાં આવેલ બિંદુનો y-યામ ..... હોય.

(ધન, ઋણ, શૂન્ય)

6. જો $5x - 3y = k$નો એક ઉકેલ (5, 7) હોય, તો k = ... *(46, 4, 6)*

7. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે ..... ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે. *(સમરૂપ, એકરૂપ, ગુરુકોણ)*

8. વર્તુળની કોઈ પણ ત્રિજ્યાનું માપ તેના વ્યાસ કરતાં ..... હોય. *(બમણું, અડધું, અધિક)*

નીચે આપેલાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે જણાવો : (પ્રશ્ન 9થી 11)

9. બિંદુઓ P (5, 0) અને Q (– 3, 0) માટે PQ = 8.

10. એક બિંદુમાંથી ફક્ત એક જ રેખા પસાર થાય.

11. પતંગાકારના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે.

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં કે શબ્દમાં કે આંકડામાં જવાબ આપો : (પ્રશ્ન 12 અને 13)

12. થેલ્સ કયા દેશનો વતની હતો?

13. Δ ABC અને Δ XYZમાં AB = XZ, BC = ZY અને $\angle B = \angle Z$ હોય, તો Δ ABC અને Δ XYZની એકરૂપતા સંકેતમાં દર્શાવો.

યોગ્ય જોડકાં જોડો : (પ્રશ્ન 14 અને 15)

વિભાગ A	વિભાગ B
14. ΔABCમાં AB = 33 સેમી, BC = 34 સેમી અને AC = 65 સેમી હોય, તો s = ... સેમી.	a. 6 b. 60 c. 66
15. ΔPQRમાં $\angle Q = 90°$, PQ = 3 સેમી, QR = 4 સેમી હોય, તો ar (PQR) = ... સેમી^{2}.	

વિભાગ B

નીચે આપેલા 9 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 6 પ્રશ્નોની ટૂંકમાં ગણતરી કરી જવાબ આપો : **12**

[પ્રશ્નક્રમાંક 16થી 24 – *પ્રત્યેકના 2 ગુણ*]

16. $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

17. સાદું રૂપ આપો : $[5^2(8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{1}{3}})^3]^{\frac{1}{5}}$

18. અવયવ પાડો : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

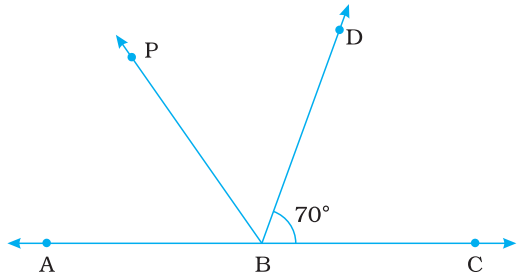
19. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને 8.2×7.8ની કિંમત શોધો.

20. નીચેનામાંથી કયાં બિંદુઓ સમીકરણ $2x + 3y = 24$ના ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી, તે તપાસો :

(1) $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

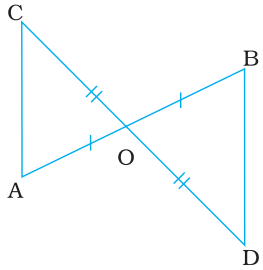
(2) (6, 4)

21. આપેલ આકૃતિમાં $\angle DBC = 70°$ છે તથા કિરણ BP એ $\angle DBA$નો દ્વિભાજક છે. $\angle PBC$ તથા વિપરીત $\angle PBD$ શોધો.

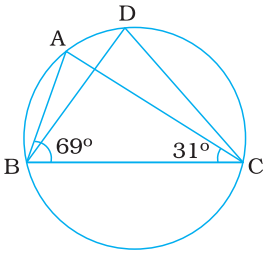


22. જેમાં $\angle A = 90°$ અને $AB = AC$ હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC છે, તો $\angle B$ અને $\angle C$ શોધો.

23. આપેલ આકૃતિમાં AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં એકબીજાને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે, $AC = BD$.



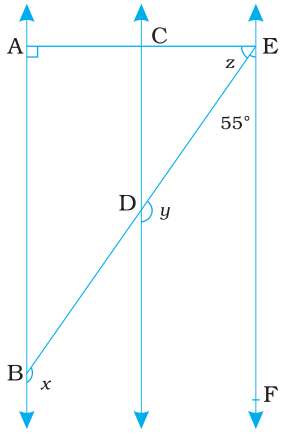
24. આપેલ આકૃતિમાં $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ છે, $\angle BDC$ શોધો.



વિભાગ C

નીચે આપેલા 8 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 5 પ્રશ્નોની ગણતરી કરી જવાબ આપો : [પ્રશ્નક્રમાંક 25થી 32 – *પ્રત્યેકના 3 ગુણ*] 15

25. આપેલ આકૃતિમાં $AB \parallel CD$ અને $CD \parallel EF$ અને $EA \perp AB$ છે. જો $\angle BEF = 55°$ હોય, તો x, y અને zનાં માપ શોધો.



26. સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બે બાજુઓ સમાન હોય તો તેમની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.

27. સાબિત કરો કે, ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.

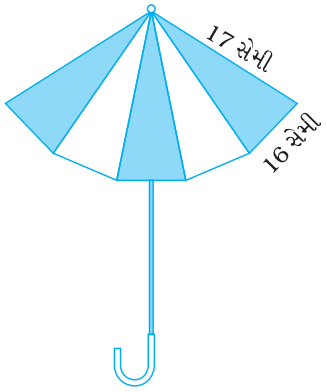
28. ABCD લંબચોરસ છે અને તેની બાજુઓ AB, BC, CD અને DAનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે, ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

29. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.

30. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.

31. ત્રિકોણની બાજુઓ 12 : 17 : 25ના પ્રમાણમાં હોય અને તેની પરિમિતિ 540 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

32. 17 સેમી, 17 સેમી અને 16 સેમીના દરેક ટુકડાના બે અલગ અલગ ડિઝાઇનના કાપડના 14 ત્રિકોણાકાર ટુકડાને ટાંકા કરીને છત્રી બનાવવામાં આવે છે. છત્રી માટે દરેક ડિઝાઇનના કેટલા કાપડની જરૂર છે?



વિભાગ D

નીચે આપેલા 3 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 2 પ્રશ્નોની માગ્યા મુજબ ગણતરી કરી જવાબ આપો : 8
[પ્રશ્નક્રમાંક 33થી 35 – *પ્રત્યેકના 4 ગુણ*]

33. જેમાં $AB = AC$ હોય તેવા ΔABCનો વેધ AD છે, તો સાબિત કરો કે, (1) AD એ BCને દુભાગે છે. (2) AD એ $\angle A$ને દુભાગે છે.

34. સાબિત કરો કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે.

35. સાબિત કરો કે, વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.

પ્રશ્નપત્ર 3 : વાર્ષિક પરીક્ષા

[બોર્ડનું નમૂનાનું પ્રશ્નપત્ર]

સમય : 3 કલાક] **[કુલ ગુણ : 80**

સૂચનાઓ : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **54** પ્રશ્નો વિભાગ A, B, C અને Dમાં વહેંચાયેલા છે.

(2) પ્રશ્નોમાં જનરલ વિકલ્પો આપેલા છે.

(3) વિભાગની સૂચના સાથે જમણી બાજુના અંક તેના ગુણ દર્શાવે છે.

(4) જરૂર જણાય ત્યાં આકૃતિ દોરવી.

(5) સ્પષ્ટ વંચાય તેવું હસ્તલેખન કરવું.

(6) કૅલ્ક્યુલેટર, સ્માર્ટ વૉચનો ઉપયોગ કરવો નહીં.

(7) નવો વિભાગ નવા પાને લખવો.

વિભાગ A

સૂચના મુજબ જવાબ આપો : **24**

[પ્રશ્નક્રમાંક 1થી 24 – *પ્રત્યેકનો 1 ગુણ*]

વિધાન સાચું બને તે રીતે યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો : (પ્રશ્ન 1થી 6)

1. 10 અને 11 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યા ..... છે.

A. $\frac{21}{8}$ B. $\frac{87}{8}$ C. $\frac{97}{8}$ D. $\frac{47}{8}$

2. બહુપદી $5x^3 + 4x^2 + 7x$ની ઘાત ..... છે.

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

3. ઊગમબિંદુ Oને સંગત કઈ સંખ્યા સંકળાયેલી હોય છે?

A. 0 B. 1 C. 10 D. 100

4. નીચેનામાંથી કયું બિંદુ સમીકરણ $x - 2y = 4$નો ઉકેલ છે?

A. (0, 2) B. (2, 0) C. (4, 0) D. (1, 1)

5. $\angle A$ અને $\angle B$ રૈખિક જોડના ખૂણા છે. $\angle A = 140°$, તો $\angle B$ના કોટિકોણનું માપ ..... છે.

A. 40° B. 50° C. 140° D. 100°

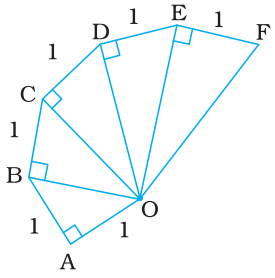
6. લીંબુના બે સમાન ટુકડા કરતાં મળતા પ્રત્યેક ટુકડાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

A. πr^2 B. $2\pi r^2$

C. $3\pi r^2$ D. $4\pi r^2$

નીચે આપેલાં વિધાનો સાચાં બને તેમ કૌંસમાં આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય જવાબ પસંદ કરી લખો : (પ્રશ્ન 7થી 12)

7. આપેલ આકૃતિમાં OEની લંબાઈ ..... છે. *($\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$)*

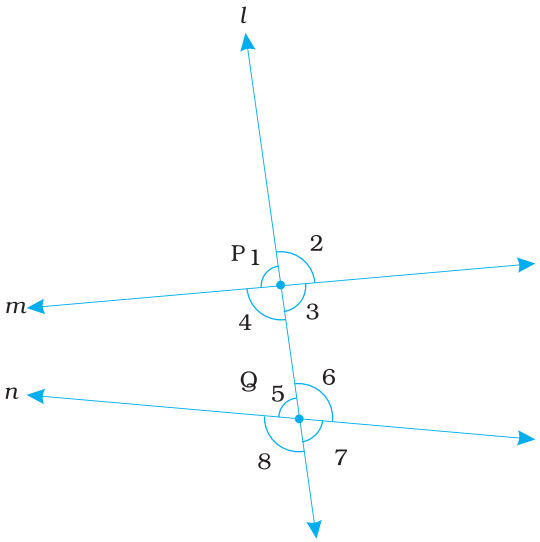


8. બિંદુ (7, – 5)નું x-અક્ષથી અને y-અક્ષથી લંબઅંતરનો સરવાળો ..... થાય. *(7, 5, 12)*

9. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ $x + 2y = 6$ માટે

$a + b =$ ..... . *(2, 3, 5)*

10.



રેખા l એ રેખાઓ m અને nને અનુક્રમે બિંદુઓ P અને Qમાં છેદે છે. ઉપરની આકૃતિ પરથી અનુકોણની જોડ ..... છે. *($\angle 1$ અને $\angle 5$, $\angle 4$ અને $\angle 6$, $\angle 3$ અને $\angle 6$)*

11. ΔABC માટે $a = 40$ મી, $b = 24$ મી, $c = 32$ મી છે, તો ΔABC માટે $s =$ ..... મીટર થાય. *(96, 48, 24)*

12. આવૃત્તિ બહુકોણમાં x-અક્ષ પર ..... દર્શાવવામાં આવે છે. *(આવૃત્તિ, મધ્યકિંમત, અધઃસીમા)*

નીચે આપેલાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે જણાવો : (પ્રશ્ન 13થી 16)

13. દરેક અસંમેય સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

14. $p(x) = (3x^2 + 5)^4$નો ઘાત 2 છે.

15. ઘન પદાર્થને ત્રણ પરિમાણ હોય છે.

16. જો $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ હોય, તો $PR = AB$ થાય.

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં કે શબ્દમાં કે આંકડામાં જવાબ આપો : (પ્રશ્ન 17થી 20)

17. ગણિતશાસ્ત્રી થેલ્સના ખ્યાતનામ વિદ્યાર્થીનું નામ જણાવો.

18. રેખાઓ l અને m સમાંતર છે. રેખા n એ $l \parallel m$ની છેદિકા છે. છેદિકા દ્વારા અંતઃ યુગ્મકોણની કેટલી જોડ બને?

19. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું હેરોનનું સૂત્ર જણાવો.

20. 1 – 3ના વર્ગની મધ્યકિંમત કેટલી?

યોગ્ય જોડકાં જોડો : (પ્રશ્ન 21 થી 24)

વિભાગ A	વિભાગ B
21. બહુપદી $5x^3 + 4x^2 + 7x$નો ઘાત	a. 0
22. બહુપદી $4 - x^2$માં xનો સહગુણક	b. 2
	c. 3
23. શંકુનું ઘનફળ	a. $\frac{4}{3}\pi r^3$
24. અર્ધગોળાનું ઘનફળ	b. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
	c. $\frac{2}{3}\pi r^3$

વિભાગ B

નીચે આપેલા 13 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 9 પ્રશ્નોના ટૂંકમાં ગણતરી કરી જવાબ આપો : 18

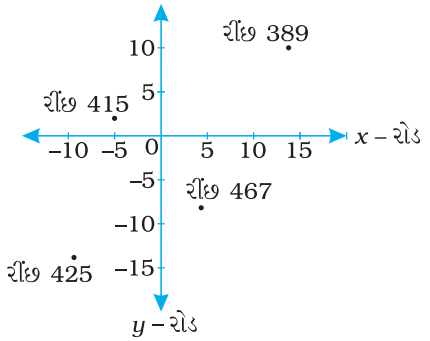
[પ્રશ્નક્રમાંક 25થી 37 – *પ્રત્યેકના 2 ગુણ*]

25. કિંમત શોધો : (1) $(125)^{-\frac{2}{3}}$ (2) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$

26. $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$નાં છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

27. ચકાસો : 2 અને 0 એ બહુપદી $x^2 - 2x$નાં શૂન્યો છે.

28.



એક જંગલ સુરક્ષા અધિકારીએ રીંછના વિસ્તારને ગ્રાફમાં રજૂ કરેલ છે. ઊગમબિંદુ અધિકારીના કંટ્રોલરૂમનું સ્થાન દર્શાવે છે. x અને y રોડ દર્શાવેલ છે. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) કયું રીંછ રોડ xની સૌથી વધુ નજીક છે?

(2) કયું રીંછ રોડ yથી સૌથી વધુ દૂર છે?

29. નીચેનાંમાંથી કયાં બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ નાં ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી, તે ચકાસો :

(1) (0, 2) (2) (1, 1)

30. વ્યાખ્યા લખો :

(1) ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

(2) અભિકોણો

31. રેખાઓ PQ અને RS એકબીજાને બિંદુ Oમાં છેદે છે. જો $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ હોય, તો તમામ ખૂણાના માપ શોધો.

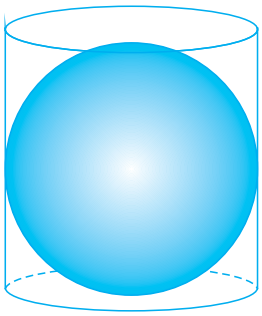
32. ΔABCમાં $\angle A = \angle C$ છે. જો $BC = 3$ અને ΔABCની પરિમિતિ 10 હોય, તો ACનું માપ શોધો.

33. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ શોધો.

34. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધ બેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે, તો

(1) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(2) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

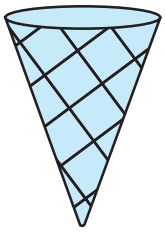


35. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(1) આઇસ્ક્રીમના કોનમાં વપરાયેલ કુલ કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

(2) ફૂટબૉલમાં સમાયેલ હવાનું ઘનફળ શોધવાનું સૂત્ર લખો.

36. બાજુમાં આઇસ્ક્રીમ કોનનું ચિત્ર આપેલ છે. તેની ત્રિજ્યા 4 સેમી, ઊંચાઈ 15 સેમી છે. દુકાનદાર કોનનો $\frac{1}{4}$ ભાગ ખાલી રાખે છે, તો કોનના ખાલી ભાગનું ઘનફળ πના ગુણાંકમાં શોધો.



37. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) 90 – 100 વર્ગની અધઃસીમા અને ઊર્ધ્વસીમા જણાવો.

(2) સ્તંભાલેખમાં x-અક્ષ પર આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાંથી શું દર્શાવવામાં આવે છે?

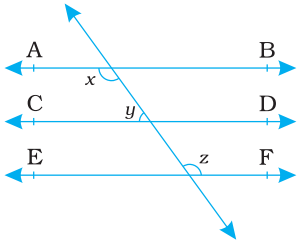
વિભાગ C

નીચે આપેલા 9 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 6 પ્રશ્નોના ગણતરી કરી જવાબ આપો : [પ્રશ્નક્રમાંક 38થી 46 – *પ્રત્યેકના 3 ગુણ*] 18

38. $1.272727... = 1.\overline{27}$ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

39. સાબિત કરો કે, ''પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણો સમાન હોય છે.''

40. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ જો AB || CD, CD || EF અને $y : z = 3 : 7$ છે, તો xનું મૂલ્ય શોધો.



41. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈ પણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે તેમ સાબિત કરો.

42. આરતી, બોબી, ચાર્મી, દર્શન એક રમત રમી રહ્યા છે. તેઓ વર્તુળાકાર પથ પર ક્રમિક અલગ અલગ સ્થાન પર ઊભા છે. આરતી અને ચાર્મી એક દોરી પકડીને ઊભા છે. દર્શન અને બોબી બીજી એક દોરી પકડીને ઊભા છે. બંને દોરી એકબીજાને જ્યાં છેદે ત્યાં બનતા ખૂણા પૈકી એક ગુરુકોણનું માપ 130° છે. આરતી, ચાર્મી અને દર્શન વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ 20° છે, તો બોબી, આરતી અને ચાર્મી વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ શોધો.

43. એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની બાજુઓની લંબાઈ 3 : 5 : 7ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 300 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

44. રમેશભાઈ પાસે એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારનું ખેતર છે. રમેશભાઈ આ ખેતરને વિકર્ણ દ્વારા 100 મી બાજુવાળા બે સમબાજુ ત્રિકોણ આકારમાં વિભાજિત કરી ખેતરનો એક ભાગ જેનું ક્ષેત્રફળ $2500\sqrt{3}$ મી^{2} છે. તે પ્રહલાદભાઈને વેચી દે છે અને બાકીનો એક ભાગ તેના પુત્ર વિજયને આપે છે.

આપેલ માહિતીના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) ઉપર આપેલ માહિતીના આધારે ભૌમિતિક આકૃતિ દોરો.

(2) વિજયના ભાગમાં આવેલ ખેતરની અર્ધપરિમિતિ જણાવો.

(3) વિજયના ભાગમાં આવેલ ખેતરના ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ જણાવો.

45. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

46. મોનીકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો. (તંબુના પાયાના ભાગમાં કૅનવાસ નથી.)

વિભાગ D

નીચે આપેલા 8 પ્રશ્નોમાંથી કોઈ પણ 5 પ્રશ્નોની માગ્યા મુજબ ગણતરી કરી જવાબ આપો : 20

[પ્રશ્નક્રમાંક 47થી 54 – *પ્રત્યેકના 4 ગુણ*]

47. નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી નીચેના દાખલા પૂર્ણ કરો :

(1) $(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + ... + 3(3a)(4b)(.....)$

$= 27a^3 + ... + 36ab\,(3a + 4b)$

$= 27a^3 + 64b^3 + ... + 144ab^2$

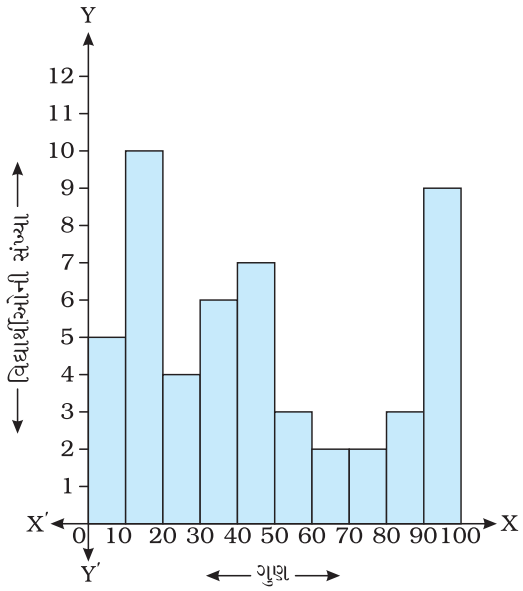
(2) $104 \times 96 = (100 + ...)\,(100 - .....)$

$= (100)^2 - (.....)^2$

$= ..... - 16$

$= 9984$

48. કોઈ એક વર્ગના 51 વિદ્યાર્થીઓના 100 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ નીચેના આલેખમાં દર્શાવેલ છે :



ઉપરોક્ત આલેખના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) આપેલ આલેખનો પ્રકાર જણાવો.

(2) આપેલ આલેખનું પ્રમાણમાપ લખો.

(3) 60થી 80 ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી છે?

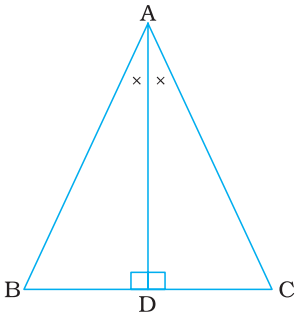
(4) સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કયા વર્ગ અંતરાલમાં છે?

49. કોઈ એક સંસ્થા દ્વારા 15થી 44 (વર્ષમાં) વચ્ચેની વયવાળી સ્ત્રીની માંદગી અને મૃત્યુનાં કારણો શોધવા માટે કરવામાં આવેલ વિશ્વવ્યાપી સર્વેક્ષણના આંકડા (% માં) નીચે પ્રમાણે મળ્યા હતા :

ક્રમ	કારણો	સ્ત્રી મૃત્યુદર (%)
1.	પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ	32
2.	જ્ઞાનતંતુ સંગત મનોવિકાર	25
3.	ઈજાઓ	12
4.	હૃદય અને રક્તવાહિકાતંત્રની સ્થિતિ	04
5.	શ્વસનતંત્રની સ્થિતિ	05
6.	અન્ય કારણો	22

ઉપર આપેલ માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

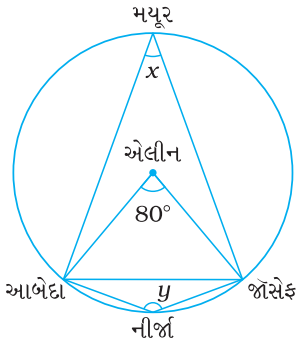
50. ΔABCમાં, $\angle A$નો દ્વિભાજક AD એ BCને લંબ છે. સાબિત કરો કે, AB = AC અને ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



51. સાબિત કરો કે, ''સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા સમાન હોય છે.''

52. સાબિત કરો કે, ''સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ હોય છે.''

53. એક વર્તુળાકાર મેદાનમાં નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પાંચ મિત્રો એલીન, મયૂર, જૉસેફ, નીર્જા અને આબેદા ઊભા છે.



ઉપરોક્ત આકૃતિના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

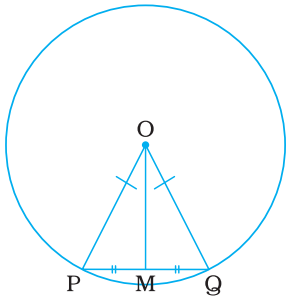
(1) xનું માપ શોધો.

(2) yનું માપ શોધો.

(3) $x + y$નું માપ શોધો.

(4) આબેદા, મયૂર, જૉસેફ અને નીર્જાને ક્રમિક રીતે જોડવાથી બનતા ચતુષ્કોણનો પ્રકાર જણાવો.

54. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ PQ એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે અને Oને PQના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડેલ છે. OP અને OQ એ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ છે.



આ માહિતીના આધારે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યાઓ પૂરો :

($\angle OMP$, OQ, OMQ, PM)

ΔOPM અને ΔOQM માં

OP = ... (∵ એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

..... = QM (∵ M એ PQનું મધ્યબિંદુ છે)

OM = OM (∵ સામાન્ય બાજુ)

$\therefore \Delta OMP \cong \Delta$ ..... (∵ બાબાબા એકરૂપતાની શરત)

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં અનુરૂપ અંગો સમાન હોવાથી

..... = $\angle OMQ = 90°$

જવાબો

પ્રશ્નપત્ર 1

વિભાગ A

1. A. અનંત આવૃત્ત **2.** A. પ્રથમ **3.** D. $10y + x + 15$

4. C. 90° **5.** 0 **6.** 16 **7.** 4 : 2 : 1 **8.** 22°

9. ખરું **10.** ખરું **11.** ખોટું **12.** 7 **13.** શૂન્ય

14. → c **15.** → a

વિભાગ B

16. $\frac{19}{30}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}$ **17.** $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

18. $p(0) = 2$; $p(2) = 4$ **19.** $k = -3$

20. (1) બંસી (2) ચેતન અને દીપક

21. (1) OY′ (2) દ્વિતીય ચરણમાં

22. (2, 2), (0, 3), (6, 0) અને (4, 1)

24. $x = 24°$, $y = 30°$, $z = 36°$

વિભાગ C

26. $\frac{149}{198}$ **27.** $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$

28. (1) $16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$

(2) $125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$

29. (1) (i) અને (ii) ઉકેલ નથી. (iii) ઉકેલ છે.

(2) $x - 2y = 0$

30. ∠XYQ = 122°, વિપરીત ∠QYP = 302°

31. ∠AGE = 126°, ∠GEF = 36° અને ∠FGE = 54°

વિભાગ D

33. (1) $(5a - 3)$, $(5a - 4)$ (2) $(7y - 3)$, $(5y + 4)$

34. (2) $3x - 2y = -6$

પ્રશ્નપત્ર 2

વિભાગ A

1. C. $4n$ **2.** D. – 1 **3.** A. 14.8 **4.** B. સમભુજ

5. ઋણ **6.** 4 **7.** એકરૂપ **8.** અડધું **9.** ખરું **10.** ખોટું

11. ખોટું **12.** ગ્રીસ **13.** Δ ABC ≅ Δ XZY

14. → c **15.** → a

વિભાગ B

16. $\frac{7 - 3\sqrt{2}}{31}$

17. 5

18. $(2x + 3y)^3$

19. 63.96

20. (1) ઉકેલ નથી, (2) ઉકેલ છે.

21. ∠PBC = 125°, વિપરીત ∠PBD = 305°

22. ∠B = 45°, ∠C = 45°

24. ∠BDC = 80°

વિભાગ C

25. $x = 125°$, $y = 125°$, $z = 35°$

29. 6 સેમી

31. 9000 સેમી^{2}

32. 840 સેમી^{2}

પ્રશ્નપત્ર 3

વિભાગ A

1. B. $\frac{87}{8}$ **2.** C. 3 **3.** A. 0 **4.** C. (4, 0) **5.** B. 50°

6. C. $3\pi r^2$ **7.** $\sqrt{5}$ **8.** 12 **9.** 3 **10.** ∠1 અને ∠5

11. 48 **12.** મધ્યકિંમત **13.** ખરું **14.** ખોટું **15.** ખરું

16. ખોટું **17.** પાયથાગોરસ **18.** બે જોડ

19. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

20. 2 **21.** → c **22.** → a **23.** → b **24.** → c

વિભાગ B

25. (1) $\frac{1}{25}$ (2) $11\frac{1}{4}$ **26.** $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

28. (1) રીંછ 415 (2) રીંછ 389

29. (1) (0, 2) ઉકેલ નથી. (2) (1, 1) ઉકેલ નથી.

30. (1) ખૂણાઓની રૈખિક જોડ : જો બે આસન્નકોણના સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ એક રેખા બનાવે, તો તેવા ખૂણાઓની જોડને ખૂણાઓની રૈખિક જોડ કહે છે.

(2) અભિકોણો : સામાન્ય શિરોબિંદુ ધરાવતા બે ખૂણાઓમાં જો એક ખૂણાનો દરેક ભુજ બીજા ખૂણાના ભુજ સાથે મળીને રેખા બનાવતો હોય, તો તેવા ખૂણાઓને અભિકોણો કહે છે.

31. $\angle POR = \angle SOQ = 75°$, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$

32. AC = 4

33. 150°

34. (1) $4\pi r^2$ (2) $4\pi r^2$

35. (1) $\pi r\,(l + r)$ (2) $\frac{4}{3}\pi r^3$

36. 20π સેમી^{3}

37. (1) અધઃસીમા 90, ઊર્ધ્વસીમા 100 (2) વર્ગસીમાબિંદુઓ

વિભાગ C

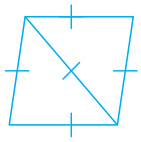
38. $\frac{14}{11}$

40. $x = 126°$

42. 30° અથવા 110°

43. $1500\sqrt{3}$ મી^{2}

44. (1)



100 મી

(2) 150 મી (3) $2500\sqrt{3}$ મી^{2}

45. 0.303 લિટર (આશરે)

46. 1232 મી^{3}

વિભાગ D

47. (1) $(4b)^3$; $3a + 4b$; $64b^3$; $108a^2b$

(2) 4; 4; 4; 10,000

48. (1) સ્તંભાલેખ (2) y-અક્ષ પર 1 સેમી = 1 વિદ્યાર્થી

(3) 4 (4) 10 – 20

53. (1) $x = 40°$ (2) $y = 140°$ (3) $x + y = 180°$

(4) ચક્રીય ચતુષ્કોણ

54. OQ; PM; OMQ; $\angle OMP$

CTP **Published by** Navneet Education Limited, Dantali, Gujarat.
Printed by Navneet Education Limited, Dantali, Gujarat. 25 01

બોર્ડની જવાબવહીને ધ્યાનમાં રાખીને તૈયાર કરવામાં આવેલ

NAVNEET®

Knowledge is wealth

EXERCISE ANSWER BOOK

એક્સરસાઇઝ જવાબવહી

વિદ્યાર્થીઓને બોર્ડની પરીક્ષા પહેલાં પ્રશ્નપત્રના ઉત્તરો લખવા માટેનો મહાવરો થઈ શકે એ માટે 'એક્સરસાઇઝ જવાબવહી' તૈયાર કરવામાં આવી છે.

સાઇઝ

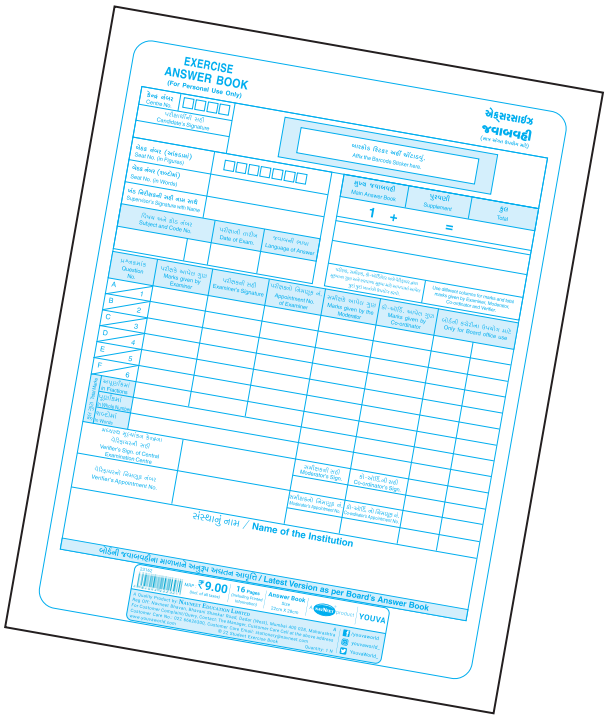
22 સેમી x 28 સેમી

પેપર

60 ગ્રામ

પાનાં

16



વિશિષ્ટતાઓ :

- બોર્ડની પરીક્ષાના પ્રશ્નપત્રના સ્વરૂપ અનુસાર.
- અંગત પ્રૅક્ટિસ તથા સ્કૂલ પરીક્ષા માટે ઉપયોગી.
- શિરોલંબ રેખાઓ દોરવા માટે મથાળે અને નીચે 1 સેમી મુજબ અપાયેલા આંકા.
- **પચીસના પૅકિંગમાં ઉપલબ્ધ.**